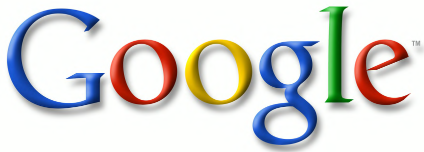


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

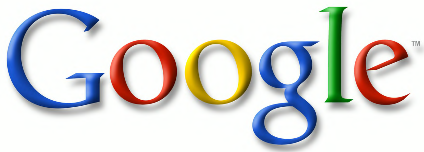
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.
+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.
+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.
+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

HARVARD COLLEGE
LIBRARY



FROM THE BEQUEST OF
MRS. ANNE E. P. SEVER
OF BOSTON

Widow of Col. James Warren Sever
(Class of 1817)

ANNALI

DELLE

UNIVERSITÀ TOSCANE

TOMO DICIANNOVESIMO

Proprietà Letteraria

ANNALI

DELLE

UNIVERSITÀ TOSCANE

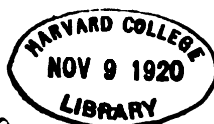
PARTE PRIMA

SCIENZE NOOLOGICHE

TOMO DICIANNOVESIMO

PISA
TIPOGRAFIA T. NISTRI E C.
1893

L Soc 2544.25F



Sever fund

INDICE DEL VOLUME

PARTE PRIMA

PARTE SECONDA

ETTORE PAIS

PROF. ORD. DI STORIA ANTICA NELLA R. UNIVERSITÀ DI PISA

ATAKTA

QUESTIONI

DI

STORIA ITALIOTA E SICELIOTA

A

GIROLAMO VITELLI

MAESTRO INCOMPARABILE

INDICE

I.

L'ALLEANZA DI TARANTO E DI REGGIO

CONTRO GLI JAPIGI

Diodoro riferisce all'anno 4.° dell'Olimpiade 76. = a. 473 a. C. la guerra fra i Tarantini e gli Japigi e la famosa distatta toccata ai primi, che Erodoto non esitò chiamare la maggior sconfitta che, a sua memoria, fosse toccata a gente di stirpe ellenica (VII. 170). Ecco come narra il fatto lo storico siciliano. " In Italia sorse la guerra dei Tarantini contro gli Japigi. Questio„ navano essi tra loro per i confini e per vario tempo si limitarono a fare „ scaramuccie e a depredare a vicenda il paese nemico; crescendo però le „ inimicizie e avvenendo frequenti uccisioni, in ultimo mossero a battaglia „ campale. Gli Japigi ordinarono le forze, di cui essi stessi disponevano, e vi „ unirono quelle degli alleati finitimi tanto da poter mettere assieme oltre „ 20 mila combattenti. I Tarantini, avendo avuto notizia della potenza delle „ forze raccolte contro di essi, radunarono la milizia cittadinesca e si ag„ giunsero quella dei Reggini, che erano alleati. Essendo avvenuta una ter„ ribile battaglia ed essendo caduti molti da ambedue le parti, gli Japigi „ finirono con il vincere. I vinti divisisi in due parti si dettero alla fuga, „ gli uni si ritrassero verso Taranto, gli altri fuggirono verso Reggio. Gli „ Japigi facendo lo stesso si divisero pur essi in due parti; gli uni avendo „ perseguitato i Tarantini essendovi breve spazio framezzo „ ossia fra il campo di battaglia e Taranto " uccisero molti dei nemici. I rimanenti che per„ seguitavano i Reggini si mostrarono valorosi al punto di precipitarsi in „ Reggio insieme ai fuggiaschi e di impadronirsi della città „ (XI. 52).

Il racconto di Diodoro merita intera fede per ciò, che si riferisce alla alleanza di Taranto con Reggio ed alla grande strage fatta dagli Japigi. Esso è confermato da Erodoto, che dice che Micito, reggente di Reggio a nome dei figli di Anassilao (m. 476 / 75 a. C.) obbligò i suoi concittadini a correre in aiuto di Taranto, e che di costoro giacquero tre mila (VII. 170) e da Aristotele, che accenna al grande numero dei γνώριμοι tarantini morti in questa disfatta ed alla mutazione della costituzione di Taranto da aristocratica in democratica (Polit. V. 2. 8). Anche quanto si narra da Eliano circa il digiuno, che i Reggini fecero al fine di aiutare gli assediati Tarantini, notizia che vedo sfuggita ai critici, va riferito a questa alleanza (1). Questo racconto è però *affatto assurdo* là dove si parla della fuga dei Reggini verso la patria e della persecuzione degli Japigi, che stando loro continuamente alle spalle riescono a penetrare con essi a Reggio e ad impadronirsi di quella città.

Il Lorentz, così benemerito della storia di Taranto, non crede si debba negar fede a questo racconto (2); il Doehle si contenta di trovarlo esagerato (3); ma il Grote (1) osservò giustamente che il fatto non merita fede, e perchè Micito continua in seguito (sino al 467 a. C. v. Diod. XI. 78. 2) a governare Reggio, e perchè il racconto diodoreo è addirittura insostenibile: Reggio era troppo lontana dal campo di battaglia. A ragione egli nota che Diodoro " si doveva esser fatta un' idea assai strana della geografia dell'Italia meridionale per parlare di una fuga dalla Japigia sino a Reggio " (4). Agli argomenti del Grote se ne potrebbero addurre altri come quello delle città italiote frapposte, della natura stessa della via che avrebbero percorsa etc. Ma reputo ozioso soffermarmi per dimostrare assurdo ciò che appare tale a primo aspetto.

---

(1) ELIANO, V. H. V. 20 racconta che Ταραντίνων πολιορκουμένων ὑπὸ Ἀθηναίων καί μελλόντων ἁλῶναι λιμῷ οἱ Ῥηγῖνοι ἐψηφίσαντο μίαν ἡμέραν ἐν ταῖς δέκα νηστεύειν καὶ ἐκείνης τὰς τροφὰς ἐκχωρῆσαι Ταραντίνοις κτλ. Ignoro se sia stato di già notato che nella parola Ἀθηναίων che figura anche nell'edizione teubneriana dell'Hercher v'è un errore. Nessuno può seriamente pensare ad un assedio di Taranto da parte degli Ateniesi e tanto meno al tempo della spedizione che costoro fecero contro la Sicilia. A me pare evidente che qui si debba correggere Μεσσαπίων. Reputo poi appena necessario ricordare che la tradizione di Antioco Siracusano fr. 15 in. M. *F. H. G.* I, p. 184, circa l'origine di Taranto è stata composta, come è stato più volte giustamente notato, in seguito a questa alleanza

(2) LORENTZ, *De veterum Tarentinorum rebus gestis*, (Luccaviae 1838) p. 4.

(3) DOEHLE, *Geschichte Tarents* (Strassburg 1877) progr. p. 14, n. 2.

(4) GROTE, versione del Sadous. VII. p. 200, n. 1.

È chiaro che Diodoro ha errato. Ma nessuno, per quanto io so, ha cercata l'origine dell'errore. Eppure è naturale il pensare che il racconto non sia interamente falso. Diodoro attinge a buone fonti e qui, assai probabilmente, riferisce notizie tolte a Timeo. Se sono veri gli altri particolari, non sarà giusto, anzichè condannare e rifiutare questa parte della narrazione, verificare se Diodoro non sia incorso in una di quelle tante inesattezze, che formicolano (e chi non lo sa ormai?) nelle sue storie?

Non può darsi che i Reggini abbiano cercato rifugio non in Reggio (ciò che è impossibile) ma in un'altra città vicina? Ed in tal caso quale sarebbe la città da sostituire a Reggio?

Io credo poter risolvere nella sostanza questo quesito.

E in primo luogo discutiamo perchè Micito, un uomo politico, che ci è presentato come assai savio e prudente, e tale era di certo, contro la volontà della cittadinanza decise di aiutare i Tarantini. Quali ragioni lo consigliarono a favorire l'alleanza con una città così lontana?

Certo la gelosia di Micito e di Reggio verso Siracusa ed Jerone. Nel 476 a. C. le città calcidiche e diremo così sorelle di Reggio, ossia Naxo, Catane e Leontini erano ormai state soggiogate da Jerone il quale, cacciati i primi abitatori, vi aveva stabilite delle colonie militari sostituendo alla popolazione indigena mercenari peloponnesii (v. Diod. XI. 49). Le rivali di Siracusa erano da un canto Agrigento, ove regnava Terone, dall'altra Reggio, che con il possesso di Messina teneva le chiavi dello Stretto ed ove Micito sapeva così bene accudire agli interessi dei figli di Anassilao e dei Reggini, che Jerone dovette ricorrere agli intrighi per sbarazzarsi di lui ed approfittare della inesperienza dei suoi giovani cognati (v. Diod. XI. 66. a. 467 a C.; cfr. Sch. Pind. Pyth. I. 112). Jerone e Siracusa miravano a spadroneggiare politicamente e commercialmente. Benchè Messina fosse in potere di Reggio, nondimeno Jerone aveva saputo varcare lo Stretto. Nel 474 a. C., un anno avanti la guerra dei Tarantini, Jerone era accorso in aiuto ai Cumani ed aveva disfatti i Tirreni. La città calcidica della Campania non si era rivolta, come era il caso, alla sua naturale alleata, alla sua colonia di Reggio, bensì alla dorica Siracusa!

L'impero reggino era dunque scosso nelle sue fondamenta, anzi la stessa Reggio era stata minacciata da Jerone allorchè Anassilao aveva mosso

guerra ai vicini Locresi, gli alleati di Siracusa, (v. Sch. Pind. Pyth. I. 98; II. 84). Era pertanto naturale che Reggio si procurasse alleati e cercasse di tener testa a Siracusa, che spingeva ormai le sue navi vittoriose là ove sino allora avevano esercitato una pressochè incontrastata egemonia commerciale quelle delle città ionio-calcidiche ed ionio-focesi.

Ora le città che potevano porgere aiuto a Reggio erano le achee, Locri e Taranto: Ma fra le achee Sibari era distrutta dal 510, Metaponto oramai subiva il giogo di Taranto (1).

Restava Crotone, ormai la più potente città achea e che doveva trovare il suo interesse nell'aiutare Reggio contro Siracusa anche perchè essa, pochi anni prima, era stata minacciata, al pari di quella, da Jerone (v. oltre). Ma Crotone non era amica di Reggio. Già alla battaglia della Sagra i Locresi avevano avuto per alleati i Reggini contro i Crotoniati; i Locresi erano stati attaccati da Crotone per l'aiuto recato agli ionii Siriti. Se i Reggini troviamo collegati ai Locresi alla battaglia della Sagra, può supporsi che anche essi, che nel fondo erano ionii, avessero aiutato Siris, la quale al pari di Reggio facea una vera concorrenza al commercio dei Crotoniati. E che Reggio non fosse amica di Crotone verso il 473 dimostra la circostanza che a Reggio trovarono accoglienza i pitagorici fuggiti poco dopo quell'anno da Crotone (v. Aristotex. fr. 11 in M. F. H. G. II. p. 274). Reggio infine non poteva sperare aiuto da Locri, che ora più di ogni altra doveva esserle nemica. Il comune pericolo aveva riunite le forze Reggine e Locresi alla Sagra, ma, passato questo, dovevano divampare le antiche inimicizie fondate e

(1) Che Metaponto subisse l'egemonia di Taranto e che, pur mantenendo la sua autonomia, avesse perduto il diritto di fare una politica per proprio conto, a me sembra evidente da tutto quanto sappiamo intorno alla storia di questa città. Ed è noto, per citare un solo esempio, come i Tarantini nella lotta contro Turio, due anni dopo la fondazione di questa città, ossia nel 433 si impadronissero di Siris e fondassero in luogo di lei la città di Eraclea (Diod. XII. 36). Se in questa guerra di Metaponto non si fa menzione e se invece è detto che i Tarantini tenevano più tardi ad Eraclea il concilio della lega italica (v. Strab. VI. 280), è chiaro che Metaponto non aveva voce diretta nel concilio, ove Taranto appunto l'aveva come signora di terra achea. Per la stessa ragione allorchè (verso il 453?) si ricostituì la lega achea (v. Polyb. II. 39) di questa fecero parte Crotone, Caulonia e la seconda Sibaris: ma non vi si fa menzione di Metaponto la quale pur serbando autonomia locale e monetazione propria diventa, in fatto di politica estera, una semplice dipendenza di Taranto. Di questi fatti non si è resa una chiara ragione l'[illegible] nella del resto pregevole memoria *De rebus Metapontinorum* (Gottingae 1850) p. 34, che e suppone che Metaponto partecipasse a quella lega, di cui parla Polibio, e dichiara di ignorare perchè non si nominino i Metapontini nelle lotte fra Taranto e Turio.

sulla differenza di razza e sulla rivalità determinata dalla vicinanza territoriale e dal possesso di Mesma e di Ipponio per parte di Locri, che per mezzo di esse al pari di Crotone, di Siris, di Sibari non solo aveva nociuto e continuava a nuocere al commercio di Reggio (1), ma impediva a costoro qualsiasi espansione territoriale nel Bruzzio. Reggio era quindi ostile a Locri verso il 473, e Locri stretta fra le due città nemiche di Reggio e di Crotone trovò la sua salvezza nell'appoggiarsi a Siracusa, della quale da questo tempo in là essa fu la fedele alleata.

Non rimaneva che Taranto. La sua amicizia era preziosa. Taranto possedeva l'unico porto ampio e sicuro, che si trovi dal capo di Leucade sino allo stretto di Messina, l'unica buona stazione invernale, e qualunque nave giungesse o partisse dall'Italia verso la Grecia o dall'Oriente verso l'Occidente doveva soffermarsi davanti alle sue acque (v. Polyb. X. 1.).

Taranto era, è vero, città dorica e da questo punto di vista era naturale alleata di Siracusa. Ma in tutti i tempi le affinità di sangue cedettero luogo agli interessi commerciali. La floridezza di Siracusa al tempo dei Dinomenidi non poteva non destare le gelosie della città spartana e non dar sfogo a quei sentimenti ostili, che Taranto ebbe per Siracusa al tempo del grande Dionisio (2).

Reggio era signora dello Stretto, Taranto dell'unico porto, che era in pari tempo il più vicino alla Grecia ed all'Oriente. Un loro accordo e nuoceva alla concorrenza di tutte le altre città italiote ed era destinato a paralizzare Siracusa, ormai invadente e che penetrava arditamente nel mar tirreno ove, come dicevamo testè, le città calcidiche, e fra queste prime Reggio e Cuma, avevano e per molto tempo esercitato un' egemonia. Appunto perchè Micito cercava di tener fronte a Siracusa, nell'anno 2.° dell'Olimpiade 77=471. a. C. fondò una colonia reggina a Pyxus ossia a Buxento (Policastro) sulla spiaggia del Tirreno (Diod. XI. 59).

(1) Per comprendere il danno commerciale, che recava a Reggio il possesso di Ipponio in mano di Locri, basti ricordare che Ipponio era uno dei luoghi più convenienti per la caccia dei tonni; anzi i tonni di Ipponio, secondo il giudizio di Archestrato, il famoso gastronomo siceliota (apd. Athen. VII. p. 302. C.) passavano per essere i migliori del mondo.

(2) Quali fossero i veri sentimenti, che animavano il popolo tarantino verso Siracusa al tempo di Dionisio, ricaviamo chiaramente da Polieno V. 8. 2. Ed è nota l'avversione di Taranto per la potenza siracusana al tempo di Agatocle. Amicizia fra le due città non corse, per quanto sappiamo, che al tempo della democrazia siracusana, dell'arrivo degli Ateniesi e in quello di Dionisio II. Intorno a queste relazioni discorro ampiamente in uno speciale lavoro, che vedrà la luce fra pochi mesi.

Ed è questa colonia di Pyxus che ci dà la chiave dell'alleanza tra Taranto e Reggio e del passo controverso, intorno al quale disputiamo. Diodoro dice che Micito ἔκτισε Πυξοῦντα ed ha ragione, se vuol dire che Micito vi fondò una colonia reggina, ma ha torto, se vuol dirci che Buxento fu allora fondata per la prima volta. Noi possediamo uno statere d'argento incuso, più volte pubblicato, che appartiene alla metà del secolo VI e che mostra come Pyxus fosse in relazioni di alleanza e di amicizia con Siris, la città ionica fondata dai Colofonii, posta sulle sponde del fiume omonimo nel golfo tarantino (1).

Le due città gareggiavano adunque con Sibari, che risalendo la valle del Coscile trasportava le merci milesie sul mar tirreno nelle due colonie di Lao e di Scidro, ove venivano invece sbarcate quelle degli Etruschi, che per la stessa via giungevano a Sibari d'onde alla lor volta erano caricate per l'Oriente (2), e gareggiavano anche con Crotone che, di buon' ora, si impadronì per lo stesso fine di Terina e di Tempsa sul mar Tirreno.

Noi sappiamo che le tre città achee di Metaponto, Sibari e Crotone mossero guerra alla ionica Siris e che la distrussero (verso la metà del sec. VI) (3). Non v'è dubbio alcuno sulla causa, che indusse gli Achei a infierire contro Siris. Era una pura e semplice rivalità commerciale. In aiuto di Siris si era mossa Locri e forse Reggio. Certo ambedue queste città vennero poco dopo la distruzione di Siris attaccate da Crotone. La ionio-calcidica Reggio aveva forse favorita la ionica Siris ai danni delle achee Sibari, Crotone e Metaponto (4).

Se i fatti testè ricordati mettiamo in relazione e con la lega reggina-tarantina del 473 e con la fondazione di Pyxus nel 471, ricaveremo chiaramente come Micito intendeva fare d'accordo a Taranto una concorrenza,

---

(1) v. Head, *Hist. Num.* p. 69; Garrucci, *Le monete dell'Italia antica.* II. p. 145, tav. 108 n. 1; 3. Su questo statere da un lato si legge (retrigrado) Σιρῖνος, dall'altro Πυξόες. Il significato di questa moneta ha veduto ad es. il Busolt, *Griesch. Gesch.* I. p. 263; II. p. 229.

(2) Lenormant, *La Grande Grèce.* I. p. 263 sgg.; Busolt, *Griesch. Gesch.* I p. 256.

(3) Sulla data di questa battaglia v. Busolt, *op. cit.* II. 229, n. 4; cfr. Grosser, *Geschichte und Alterthümer der Stadt Croton* (Minden 1866) I. p. 22 sg., lavoro diligente, ma privo di vedute politiche e non immune da gravi errori.

(4) Colgo l'occasione di notare come e qui ed altrove, traendo in errore anche altri, il Grosser, *op. c.* p 19, si è valso di materiale apocrifo asserendo che v'è una moneta di alleanza fra Crotone e Siris, dalla quale egli ricava che Siris cadde in potere di Crotone! E tanto meno poteva ricavare ciò da Licofrone v. 983 sg., o meglio dal suo scoliasta, dacchè ivi si allude esclusivamente alla guerra fatta a Siris da Crotone con Sibari e Metaponto. cfr. Just. XX 2, 4 sq.

o diremo meglio voleva opporre un argine a Siracusa ed in parte forse ad Agrigento, che tendevano ormai a soppiantare le altre città italiote e siceliote nelle relazioni commerciali internazionali (1). Erodoto dice espressamente che Micito obbligò i suoi concittadini a porgere aiuto ai Tarantini. E si comprende. Non solo Taranto era una città dorica, mentre il gran fondo della popolazione reggina era ionica (ciò che contava molto o poco a seconda degli interessi) ma Taranto sembrava, ed era infatti, assai lontana, nè pareva avesse contatti diretti, immediati con Reggio. Ma Micito spingeva lo sguardo molto più in là dei Reggini. L'alleanza di Taranto gli si presentava come il miglior modo di garantire a Reggio ed alle restanti colonie calcidiche della Campania il transito diretto dei commerci fra l'Oriente e l'Occidente. Poichè lo Stretto non era che nominalmente in mano di Reggio, bisognava supplire con l'astuzia. Le merci, che approdavano a Taranto, venivano sbarcate alla foce del Siris (oggi il Sinni) e, risalendo la valle di esso, giungevano a breve distanza dalla costa, in cui si trovava Pyxus. Si risparmiava un assai lungo tragitto lungo le spiaggie dell'Ionio e del Tirreno; si evitava lo stretto di Messina, e per un cammino breve le merci, senza il pericolo di essere intercettate da navi nemiche, venivano sbarcate a poca distanza dalla Campania, ove erano Cuma e le altre colonie calcidiche ad es. Neapolis.

Ragioni analoghe a queste, che determinavano ora l'alleanza fra Taranto e Reggio, furono certo quelle che mantennero vivi, sino al secolo IV, i buoni rapporti fra Neapolis e Taranto (2).

A prima vista parrebbe però che Reggio fosse maggiormente chiamata a fruire dei vantaggi di questa alleanza. L'eccellenza del porto assicurava a Taranto il transito di tutte le merci, che dall'Oriente passavano all'Occidente e viceversa. Taranto non temeva concorrenza. Era essa adunque quella che favoriva Reggio con il darle la preferenza nelle sue relazioni commer-

(1) Non ha affatto compreso il significato della colonia reggina di Pyxus il Rathgeber, *Grossgriechenland und Pythagoras.* (Gotha 1866) p. 188 sg. il quale crede che venisse fondata al fine di tenere in freno l'ambizione dei Crotoniati e le piraterie dei Tirreni. È assai probabile che i Crotoniati fossero nemici dei Reggini, ma del pari essi erano nemici di Jerone e di Siracusa verso il 476. a. C. (v. Diod. XI. 48; Sch. Pind. Ol. II. 29); i Tirreni poi erano stati fieramente battuti nel 474 e non erano certo in grado nel 471 di molestare i Sicelioti. Delle loro scorrerie vien rifatta menzione solo nel 453 (v. Diod. XI. 88).

(2) v. Dion. Hal. XV. 5; Liv. VIII. 27.

ciali. Ma come già osservammo essa doveva sentire gelosia verso Siracusa. V'era inoltre un'altra ragione. Laddove Reggio era sicura alle spalle dalla invasione di popoli barbari (chè le stirpi sannitiche non avevano ancora fatto il loro ingresso nel Bruzzio), Taranto era invece continuamente minacciata dai suoi feroci vicini gli Japigi-Messapi e dalle invaditrici stirpi sannitiche (vedi oltre). Reggio era allora alla testa di una estesa confederazione delle città ionio-calcidiche; era fiorente e popolosa (1). Era naturale che Taranto chiedesse a lei come correspettivo un aiuto di armati in caso di guerra con i vicini. Tanto più che anche Reggio era indirettamente minacciata dallo stesso pericolo. Non è certo casuale che nel 474 a. C. Cuma venisse attaccata dai Tirreni, e che nel 473 i Tarantini dovessero combattere gli Japigi. All'assalto di Cuma del 524 non avevano mosso solo Tirreni ma anche Umbri e Dauni, e verso lo stesso tempo i Tarantini avevano dovuto combattere contro i Messapi (2).

Gli Japigi ed i Messapi non erano soli ad attaccare Taranto; ad essi s'erano congiunti nel secolo V.° i Peucezzi (3) ed è lecito supporre che la grande sconfitta toccata ai Tarantini verso il 473 fosse dovuta più che al valore dei Messapi-Japigi, come pare si possa ricavare dal racconto di Erodoto, al sopravvenire di nuovi popoli invasori di stirpe sannitica (4).

(1) STRABONE, VI, p. 257 C. asserisce che ἴσχυσε δὲ μέγιστον ἡ τῶν Ῥηγίνγων πόλις καὶ περιοικίδας ἔσχε συχνάς. Questa potenza raggiunse il suo apogeo dai tempi di Anassilao a quello di Dionisio I.

(2) Sull'assalto di Cuma del 424 a. C. v. Dion. Hal. VII. 3. Quando i Tarantini abbiano riportata la vittoria sui Messapi ed abbiano dedicate a Delfo le statue di Agelada (v. PAUS. X. 10. 6) non è possibile determinare. Il LORENTZ, *op. cit.* p. 4 e sg. suppone che ciò sia da fissare al Ol. 78 = a 468 a. C. ma non ha ragioni speciali per stabilire questa data. A me pare che un elemento sempre incerto, ma migliore per fissare la data di questa guerra sia il seguente, che al Lorentz è sfuggito: Agelada fece la statua di Anoco di Taranto (Paus. VI. 14. 11.) che vinse allo stadio nell'Ol. 65 (v. Eus. ed. Schoene ad 1.) ossia nel 520 a. C. Ma può ben darsi che Anoco Tarantino avesse dato quell'incarico ad Agelada prima ancora che questi avesse atteso a lavorare per la città di lui.

(3) Pur troppo non si può determinare l'anno, in cui i Tarantini vinsero gli Japigi congiunti ai Peucezi. I doni, che per questa vittoria mandarono a Delfo, erano opera di Onata di Egina (PAUS. X. 13. 10). Ora di Onata sappiamo da PAUSANIA (VI 12. 1; VIII. 42. 8) che attese a lavorare per Jerone e che i doni di costui vennero inviati ad Olimpia dopo la morte del tiranno (467 a. C.). Valendosi di questa data il LORENTZ, op. cit. p. 6. colloca la vittoria sugli Japigi e sui Peucezi al Ol. 80 = 460 a. C. seguito dal DOEHLE, op. cit. p. 27 che senza dire il perchè la fissa tra l'Ol. 78 e l'Ol. 80 = 468-460. Ma benchè incerta questa data ha un valore approssimativo. Cf. quanto asserisce PAUSANIA (VIII. 42. 7.) sull'età di Onata.

(4) Con questa osservazione credo di infirmarne il valore di quella dell'HELBIG, il quale (*Hermes* XI. (1876) p. 473) prendendo a base il racconto erodoteo e la vigoria giovanile degli Japigi ne trae dati per l'età, in cui arrivò nelle Puglie questo popolo. Che i Peucezi non siano che un ramo della grande stirpe sabella parente dei Piceni del Piceno e dei Picentini ai confini della Campania dimostrerò altrove.

Sul principio del secolo V. tanto le città calcidiche, ossia le città alleate e sorelle di Reggio, quanto Taranto venivano minacciate dai medesimi nemici. V'era dunque un altro buon motivo, oltre al precedente, per unire fra loro le due lontane città italiote nella lotta di resistenza contro Jerone e i popoli barbari invasori. Per cause analoghe, più tardi, le città italiote si unirono contro i Lucani e Dionisio fra loro collegati.

Dopo tutto quanto abbiamo esposto noi troveremo chiaro perchè dopo la disfatta i Reggini, vinti dagli Japigi, si volgessero in fuga verso una città, che non era Taranto e che da questa anzi era discosta. Essi non cercarono rifugio nella città alleata, bensì a casa propria, dacchè nelle regioni, che guardano l'Ionio, i Reggini dovevano possedere od una città od un castello.

Che i Tarantini avessero concesso ai Reggini il pieno possesso del castello, che sorgeva sul luogo dell'antica Siris, pare cosa addirittura improbabile. È più che naturale il supporre che i Tarantini i quali, durante tutta la loro esistenza politica, lottarono per il possesso della Siritide, e che per essa combatterono con i Metapontini, (i quali in questo tempo assai probabilmente riconoscevano la loro superiorità) e più tardi con i Turini, non dovessero riconoscere su quelle spiaggie una sovranità per parte di Reggio. Ma dacchè Reggio era padrona di Pyxus e con i Tarantini commerciava per la valle del Siris, parrebbe giusto ammettere che sulla foce di questo fiume possedesse una fattoria.

Ma è forse più ovvia un' altra spiegazione.

Come è noto l'Enotria e la Conia prima delle invasioni sannitiche erano diventati paesi ellenici (1). La valle del Siris era in potere dei Greci dal secolo VI. almeno. Non è probabile che Reggio possedesse un castello in quel punto della valle, che segnava il suo confine, o diremo meglio quello della sua colonia di Pixus? La stessa notizia di Eliano (che come tutte le analoghe derivò da ottima fonte), circa il digiuno dei Reggini a favore dei Tarantini ci conferma in questa persuasione, perchè laddove una tale notizia è assurda, se si suppone che il digiuno venisse fatto a Reggio, merita fede qualora si ammetta che i digiunanti fossero i soldati e gl'inquilini

(1) A ragione insiste su questo concetto il Grote *ed. cit.* V, p. 122.

della città posta nella valle del Siris. Non può adunque supporsi che verso questo castello, dopo la sconfitta abbiano rivolto i loro passi i Reggini?

Checchè sia di ciò a noi basti l'aver reso oltremodo probabile che il luogo preso dagli Japigi fu lungo il corso del Siris. Il voler meglio determinare il luogo, in cui sorgeva questa città o castello, sarebbe follia (1). Possiamo soltanto osservare che la facilità, con la quale agli Japigi venne fatto di mescolarsi con i fuggiaschi e di impadronirsi del loro rifugio, dimostra sempre più che essi non conquistarono una vera e propria città, ma un castello o malamente o scarsamente difeso o addirittura sguernito di forze.

Diodoro pertanto avrebbe malamente abbreviata la sua fonte (assai probabilmente Timeo) ed il castello dei Reggini avrebbe addirittura trasformato nella stessa città di Reggio. L'errore ha pure il suo lato utile. Esso non poteva sfuggire che alla penna di uno scrittore dello stampo di Diodoro il quale, pur troppo, qui come altrove, dà saggio di scarsa diligenza e più che di ignoranza, di spirito poco accorto.

Ad infirmare il valore delle osservazioni fatte si potrebbe nondimeno da taluno obbiettare che, mentre la battaglia campale combattuta contro gli Japigi viene da Diodoro assegnata al 473 a C., questo stesso autore dice che Pyxus fu fondata nel 471.

Ma non credo necessario spendere parole per dimostrare il nessun valore di una simile obbiezione. È stato più volte osservato ed è ormai a tutti noto come Diodoro comprenda sotto una rubrica fatti avvenuti in varii anni. Lo stesso capitolo di Diodoro, in cui narra quella battaglia, è uno dei tanti luoghi, che si potrebbero citare in prova di tale asserto, e appunto per questo lo riferimmo testualmente. Chi lo legga attentamente vedrà infatti come egli dica che nel 473 sorse il πόλεμος fra i Tarantini e gli Japigi, come le scaramuccie durarono ἐπὶ μέν τινας χρόνους, come finalmente si venne alla battaglia campale. È chiaro che tutto ciò non potè avvenire solo nel 473, come appare da una lettura superficiale di questo capitolo e come sogliono riferire i moderni anche i più diligenti. La data della colonia reggina di

(1) E sarebbe follia, dietro il racconto di Erodoto e di Diodoro, voler determinare ove la battaglia campale avvenne. Contentiamoci di stabilire che avvenne non molto lungi da Taranto.

Pyxus del 471 può invece darci approssimativamente un *terminus ad quem* per quella della battaglia stessa. Nè mi pare si possa dubitare che Reggio fosse signora di quella città, quando spedì oltre tremila dei suoi cittadini in aiuto di Taranto.

Strabone, il quale fa pure menzione della deduzione di una colonia di Micito a Pyxus, aggiunge che πάλιν δ'ἀπῆραν οἱ ἱδρυσθέντες πλὴν ὀλίγων VI, p. 252, C. Ed anche ciò è chiaro. Micito, grazie agli intrighi di Jerone, quattro anni dopo aver fondato Pyxus, lasciava Reggio e si riduceva a vivere a Tegea nell'Arcadia (cfr. Herod. VII, 170. Diod. XI, 66. Paus. V. 26. 4).

Con la partenza di Micito spariva l'ultimo rivale di Jerone, dacchè sino dal 472 a C. era morto Terone ed era stato, in seguito, vinto all'Imera il figlio di lui Trasideo. Siracusa poteva ormai spadroneggiare anche nel mar tirreno (1). Ma appunto nel 467 moriva lo stesso Jerone; con lui periva la gloria e la potenza dei Dinomenidi e si ecclissava, ma per poco, anche quella della superba figlia di Corinto.

(1) È affatto priva di base e di valore l'ipotesi del Rathgeber, *op. cit.* p. 189, il quale suppone che la colonia reggina di Pyxus sia venuta meno causa la rivalità di Crotone e di Terina.

II.

TERINA COLONIA DI CROTONE

Terina, colonia di Crotone, è una di quelle città elleniche, a giudicarlo dalle sue monete, che maggiormente fiorirono e, benchè sia nominata raramente dagli scrittori, pure ebbe una parte importante, come vedremo, nelle guerre combattute nella Magna Grecia.

Vale la pena determinare il luogo, ove essa si trovava. Quei critici che, in questi ultimi anni, hanno trattata questa questione non hanno visto che una sola parte, e certo la meno importante, del vero. Io credo di contribuire a risolvere questa questione con nuovo materiale e con nuove considerazioni, mercè le quali, spero, di far meglio comprendere l'importanza strategica di lei ne' tempi trascorsi.

Era omai opinione accettata fra i dotti calabresi che Terina dovesse cercarsi presso il fiume Savuto (il Sabatus), a circa quattro miglia a nord di Nocera inferiore, su di un altipiano ove erano visibili gli avanzi di macerie ed ove spessi erano i rinvenimenti di anticaglie e fra queste di monete di Terina (1).

Il Lenormant, nella sua ultima opera, in quel libro, buono e cattivo ad uno istesso tempo, che scrisse sulla Magna Grecia, ove sono stranamente mescolate osservazioni acute e felici ad inesattezze innumerevoli e forse anche colpevoli, ha creduto opportuno ritrattare la questione della topografia di Temesa e di Terina ed ha, secondo me, reso assai probabile e quasi

(1) L. Grimaldi, *Studj archeologici sulla Calabria ultra seconda.* (Napoli 1845) p. 62.

certo che Terina fosse collocata presso al moderno fiume di S. Biase nella valle del Lamato o fiume di S. Ippolito (il Lametus degli antichi) e precisamente nel luogo, in cui oggi sono i Bagni di S. Eufemia. In quanto a Temesa egli la trovava alle Mattonate a due miglia a sud del fiume Savuto (1).

Il dotto calabrese Marincola-Pistoia ha pure recentemente studiato questo argomento in una sua speciale memoria sulla città Terina, ma dopo aver riprodotti gli argomenti del Lenormant, si mostra indeciso, se questa città fosse a S. Eufemia ovvero sull'altipiano già nominato, e sulla autorità di non so quale scrittore dice che questo " tuttora conserva l'antico nome della città nella sua denominazione di *Tirene* o *Tirina* " (2).

Riconosco ben volentieri i meriti del Marincola-Pistoia, ma, in questo caso, dubito che abbia valore il suo asserto, e sospetto che egli sia stato tratto in inganno. Non sarebbe certo questa la prima volta che a località antiche è rimasto il nome, che fu ad esse dato da qualche dotto locale, il quale credette di ravvisarvi gli avanzi di una data città. E frequentemente avviene, che gli scrittori posteriori credano poi tradizione locale e popolare ciò, che è invece frutto di speculazione letteraria (3). Siccome non dispongo di tutte le opere scritte su questo argomento dagli scrittori calabresi, così rinunzio a ricercare l'origine di quella omofonia. Nel fatto però a me pare che non si possa dubitare, che Terina sia a cercare nella valle del Lamato. Il nome sinus Terinaeus di Plinio non poteva essere originato da una città posta

(1) La *Grande Grèce* III. p. 83 sgg. 98 sgg. Rimando a quelle pagine, benchè io non accetti tutte le sue asserzioni. Così ad es. ritengo vano il ragionamento che egli fa sulla moneta di Terina, ove è la ninfa presso alla fonte, in cui si legge ΛΓΗ che egli, accettando l'ipotesi del Millingen, reputa essere nè più nè meno che l' Ἀρής di Licofrone, v. 730, cui egli, come il Millingen, crede corrotto da Ἀγής. Ma è ormai chiaro che quell'ἀρής non è un altro fiume di Terina bensì un epiteto (= ἰσχυρός) dell'Ocinaro v. ad la ediz. del Kinkel p. 31. cf. Sch. Vet. ad l. ib. p. 136. L'Ἄγη della moneta, come è di già stato più volte osservato, è probabilmente il nome dell'artefice. cf. Rathgeber, *Grossgriechenland und Pythagoras.* (Gotha 1886) p. 5 sgg.

(2) *Di Terina e di Lao* (Catanzaro 1886) p. 14. il quale porge notizia di una ricca tomba greca del tempo di Agatocle scoperta presso a S. Eufemia. p. 16 sg.

(3) Questo fatto continua a ripetersi dolorosamente anche per inconscia correità della nostra amministrazione, la quale è troppo facile nell'accordare a certi municipi di fregiarsi di nomi antichi, che ad essi non spettano. Apparentemente pare si tratti di cose futili; e futili sono per sè stesse. Ma avviene così che nelle carte dello Stato Maggiore si leggono nomi destinati a creare od a perpetuare o vecchi o nuovi errori. Assai giuste sono a questo proposito le osservazioni del Lenormant, *op. cit.* II, p. 24 sg.

al di là del capo Suvero. Nell'altipiano presso il Savuto, per conto mio, vedrei piuttosto le rovine dell'antica città di Temesa (1).

Il Lenormant non è del resto il primo a collocare Terina presso S. Eufemia ed a riconoscere nel fiume di S. Biase l'Ocinaro di Licofrone. Egli era stato preceduto, e forse non lo seppe, dal Rathgeber, che a Terina ha dedicata buona parte di quel grosso, strano e curioso zibaldone, che è l'opera, cui ha dato il titolo di *Magnagrecia e Pitagora*, ove, accanto a molte asserzioni gratuite, a lungaggini infinite e addirittura oziose, sono tanti dati bibliografici, e di quando in quando qualche buona osservazione (v. *op. cit.* p. 5 sgg.; 82 sgg.).

Non v'è dubbio infatti, che i passi degli antichi scrittori ci inducano a collocare Terina nella valle del Lamato, sulla costa tirrena. Licofrone ha due volte occasione di ricordare Terina, ed in uno dice che la sirena Ligeia fu spinta a Terina, ove uomini marini le dettero sepoltura là dove scorre l'onda del fiume Ocinaro, che bagnava il suo sepolcro v. 726 sgg. (cfr v. 1008 sgg.). Ora Ligeia era una delle tre sirene onorate sulla costa della Campania e della Lucania sino al Bruzzio, che ottenevano culto nelle località ad esse omonime, ossia a Partenope (Napoli), a Leucosa (Capo Licosa) ed a Ligeia (Terina) (2).

Il Pseudo Scimno (ossia la sua fonte, Eforo) tronca al v. 252 la de-

(1) Anche la bella carta del Kiepert, che orna il volume X del C. I. L, pone Terina sull'altipiano della Tirena, un punto strategico, che dominava l'ingresso della valle del Savuto e l'accesso a quella del Cratis. Io propenderei a vedervi l'antica Temesa, nè mi preoccupo del fatto che le distanze degli itinerarii ci inducano a collocarla piuttosto a circa due miglia a sud (a Torre del Casale?) v. ROMANELLI apud MARINCOLA-PISTOIA in *Opuscoli di Storia patria* (Catanzaro 1871) p. 92., non alle Mattonate come asserisce erroneamente il LENORMANT, *op. cit.* III, p. 89. cf. MARINCOLA, *Terina.* p. 21, n. 3, dacchè può darsi che Temesa si sia nel corso dei secoli anche nell'antichità spostata, o che la Temesa greca non fosse ove era quella, che esisteva ancora al II secolo (v. PAUS, VI. 6. 10), o che sull'altipiano presso il Savuto fosse la città e a Torre del Casale fossero invece le miniere, di cui parla il Romanelli, e che apparterrebbero alla Temesa omerica. v. *Od.* I. 184.

(2) SOLIN., II. 9. ed. Mommsen dice: « Insula Ligea appellata ab eiecto ibi corpore Sirenis ita nominatae ». Egli concorda adunque con Licofrone; cf. STEPH. BYZ ad. v Τέρινα. Gli storici calabresi v. apud MARINCOLA-PISTOIA, *Di Terina* etc. p. 23. credono di ritrovare quest'isola in uno scoglio posto fra Nocera ed il Savuto detto *Pietra della Nave*, che in origine non dovea essere congiunto alla terra, come oggi è, grazie alle poderose alluvioni delle *fiumare* calabresi. Io ho sotto gli occhi la carta dello Stato Maggiore italiano ridotta alla scala di 1. ad 800,000 dal Kiepert. È una carta relativamente piccola, eppure davanti a S. Eufemia scorgo chiaramente una stretta lingua di terra in forma di penisola. Parmi che quella fosse, in origine, l'isola di Ligeia, di cui parlano i due autori antichi testè citati.

scrizione della costa italiana sul Tirreno a Velia per descrivere le isole Eolie e la Sicilia, e ripigliandone la descrizione (v. 300), dopo aver fatta menzione della regione, cui, secondo gli antichi, chiama Italia ed Enotria e Magna Grecia, enumera di questa le città elleniche, ed incominciando da Terina dice: v. 305 sgg:

Ἑλληνικὰς γοῦν παραθαλαττίους ἔχει
πόλεις· Τέρειναν πρῶτον, ἣν ᾤκισαν
Κροτωνιᾶται πρότερον κτλ.

e prosegue a nominare Ipponio, Medma, Reggio etc. Che più? Strabone (VI, p. 256 C.) dice che Terina era συνεχής a Temesa, e Plinio, che, come è noto, segue la stessa fonte geografica di Strabone, probabilmente Artemidoro, dice proprio lo stesso: " oppidum Tempsa a Graecis Temese dictum et Crotoniensium Terina sinusque ingens Terinaeus " N. H. III. 5. 72; cfr. 10. 95.

Ma, per quanto io noto, dai critici non è stato discusso un passo, il quale scombussola questo risultato, che parrebbe essere così sicuro. E questo passo è di un più antico autore e più autorevole, nientedimeno che di Tucidide, il quale narra come Gilippo, partito per mare da Turio per recarsi in Sicilia al fine di soccorrere Siracusa, παρέπλει τὴν Ἰταλίαν καὶ ἁρπασθεὶς ὑπ' ἀνέμου κατὰ τὸν Τεριναῖον κόλπον ὅς ἐκπνεῖ ταύτῃ μέγας κατὰ βορέαν ἑστηκώς, venne sbattuto dalla tempesta e risospinto di nuovo a Taranto. VI, 104. 2.

È chiaro e non vi può esser dubbio; il golfo Terineo di Tucidide è il golfo scilletino famoso per le tempeste, il " *navifragum Scylaceum* " di Vergilio (Aen. III. 553). Ma come si mette di accordo questo passo con i precedenti? e sopratutto con quello di Plinio, che chiama Terineo il golfo opposto, cui altri autori, come Antioco, chiamavano Lametino dalla città e dal fiume di Lameto (Amato), od Ipponiate dalla città di Ipponio (Monteleone)?

Si potrebbe scartare questa difficoltà supponendo che Tucidide abbia qui scambiato un golfo con l'altro. Ma chi oserebbe valersi, senz'altro, di un tal rimedio e tacciare di errore uno scrittore così diligente ed assennato come Tucidide? Nei molti e pregevoli dati sulla geografia dell'Italia e della Sicilia, che ci porge Tucidide, sarebbe vano cercare il più leggiero errore, e non vi sono argomenti per unirci a coloro, che negavano valore alla notizia conservataci da Timeo, secondo il quale Tucidide visitò l'Italia (1). La fa-

(1) Tim. apd. Marcell, *Vit. Thuc.* 40, 52.

mosa descrizione di Siracusa e delle sue vicinanze è, come è noto, un validissimo argomento, perchè si presti tutta la fede a quella notizia.

Prima adunque di sentenziare che Tucidide ha errato, è necessario verificare se v'è modo di controllare il suo dato. Io credo che vi sia; e sono persuaso di non errare, asserendo che in origine Terina non era nè a occidente nè ad oriente del punto, in cui le due Sile si abbassano improvvisamente e formano i due golfi Lametino e Scilacino (1). Essa giaceva nel bel mezzo, precisamente nel luogo, in cui oggi sorge la città di Tiriolo, la quale a circa 540 metri di altezza sul livello del mare domina i due golfi, che potevano a ragione dirsi e l'uno e l'altro terinei, e domina del pari le communicazioni del paese, che la circonda (2).

A questo risultato sono indotto da due ordini di fatti. In primo luogo Tiriolo è un cospicuo centro archeologico. A cominciare dalle selci e dalle ascie litiche sino ai prodotti artistici della più bella età ellenica essa ha dato alla luce tanta messe, quanto basta per dimostrare, che ivi era una florente città greca. Il museo provinciale di Catanzaro, che io visitai appositamente lo scorso anno, è in certo modo il museo di Terina. Una visita anche superficiale di quell'istituto basta a persuadere chiunque della verità del mio asserto (3). Non basta dire, come vedremo fra poco, che ivi era l'ager Teuranus, ricordato dal famoso senatoconsulto dei Baccanali, che fu appunto scoperto a Tiriolo; in un povero vicus non potevano farsi scoperte così copiose e di così grande valore; questa notevole città, attestata da tanti monumenti, non poteva essere altro che Terina, dacchè nessun'altra è nominata in questa regione.

D'altra parte considero che Terina ha avuta, nell'antichità, una parte cospicua nella storia militare. Essa venne fondata dai Crotoniati allo stesso fine, per cui sull'ionio o fondarono o si impadronirono di Squillace e di

(1) Intorno all'espressione « le due Sile » v. quanto osservo oltre nella memoria n. V.

(2) Che Tiriolo fosse un paese antico hanno pensato tutti gli scrittori calabresi. v. GRIMALDI *op. cit.* p. 79 sg. che emisero al proposito le più strane ipotesi. Nessuno però ha pensato che ivi dovesse collocarsi Terina.

(3) Sarebbe desiderabile che qualche studioso, possibilmente una persona veramente colta del paese, facesse una statistica illustrata dei ritrovamenti avvenuti a Tiriolo.

Caulonia (1). I Crotoniati erano ostinati nemici di Sibari e di Locri, che sulle sponde del Tirreno possedevano colonie marittime, e che da ambedue le parti strozzavano in certo modo il territorio di Crotone; per potere fare una proficua concorrenza ai Sibariti, signori della valle del Crati ed anche di una parte della costa del Tirreno, ove avevano le colonie di Poseidonia, di Lao e di Scidro, era necessario fortificare tutto lo stretto formato dal golfo ipponiate e scilacino, il cui possesso procurava ad essi la possibilità di un commercio di trasbordo attraverso le valli del Corace e del Fiume di S. Biase, uguale a quello, che i Sibariti facevano attraverso il capo di Tenese, ed i Locresi attraverso la Sila meridionale per giungere alle loro colonie di Mesma ad Ipponio (2).

Per riuscire nel loro fine i Crotoniati si impadronirono di Caulonia nel mar ionio, e si assicurarono per questa parte una piena libertà d'azione verso Locri, e nel Tirreno si impossessarono o si allearono con Temesa allo sbocco del Savuto, che alla sua volta era un punto di difesa politica e commerciale contro Sibari e Locri (3). Ma per assicurare le communicazioni tra i due golfi era necessario possedere la chiave dello stretto là, ove la Sila settentrionale rapidamente si abbassa a Tiriolo, che è il punto più alto di questa, e che non solo domina ambedue i golfi, ma che è anche un utile punto di offesa e di difesa verso la valle del Cratis, ove Pandosia, la capitale enotrica, ben presto si alleò con Crotone (4).

Chi pensi ai fatti testè enumerati ed alla circostanza, che sul Tirreno

(1) Che Terina fosse colonia dei Crotoniati è espressamente indicato dal PSEUDO-SCIMNO v. 306 sg.; da PLINIO, N. H. III. 5. 72; da SOLINO, II. 10; da FLEGONTE TRALLIANO fr. 18 ed. Keller; in fine in modo oscuro da LICOFRONE, v. 1008 sgg ; cf. SCH. VET. ad l.. Su Caulonia v. PSEUD. SCIMN. v. 319; SOLIN. 1 c ; su Squillezio o Squillace v. STRAB., VI, p. 261 C.

(2) Su Lao e Scidro v HERODT,. VI, 21; cfr. STRAB., VI, p. 253 C ; su Poseidonia STRAB. VI, p. 252 C.; su Ipponio e Mesma THUC, V 5. 3; PSEUD. SCYMN, v. 308; cfr. STRAB. VI, p 256 C.

(3) L'alleanza fra Temesa e Crotone nel V secolo è un fatto noto a tutti i numismatici v. HEAD, *op cit.* p. 80. 96. Il solo GARRUCCI, *Le monete dell' Italia antica.* II, p. 147 sg. ad tav. 109. 6. si è voluto opporre all'identificazione di Temesa colla città enunciata con le lettere T E, che crede sia Terina, e mette fuori cavilli indegni di ampia confutazione. Mi basti notare che la migliore risposta ad essi è la stessa moneta pubblicata da lui a tav. 116 n. 27, con i tipi comuni allo monete crotoniati e temeane (elmo, gambali, tripode!) e con la leggenda TEM.

(4) Le relazioni fra Crotone e Temesa e Pandosia nel secolo V ci sono rivelate soltanto dalle monete. v. HEAD., *op. cit.* p. 80; 90. Mi riservo del resto ed in una mia storia della Magna Grecia e della Sicilia, di cui spero pubblicare presto il primo volume, ed in un altro lavoro, che uscirà contemporaneamente a questo, spiegare ampiamente e per ogni lato la politica di Crotone verso gli altri stati ellenici.

Crotone esercitava l'egemonia, per lo meno su Temesa, troverà sempre più naturale che essa non sentisse il bisogno di fondarvi a poca distanza Terina, la quale, anche negli avvenimenti posteriori, viene ricordata come un luogo di grande importanza strategica. Appunto perchè era tale, contro di lei mossero i Turii, i successori dei Sibariti, sotto Cleandrida (1). Allorquando i Brezzi, i più antichi abitatori del Bruzzio, ribellaronsi ai Lucani e fondarono un impero autonomo (verso il 356 a. C.) assalirono prima di ogni altra città Terina, e solo dappoi mossero contro Ipponio, Turio, e le altre città italiote (2).

Questa notizia, che sarebbe inesplicabile, se si ponesse Terina presso al mare, acquista, invece, pieno significato, quando si ammetta che essi espugnarono Tiriolo, che era difatti la chiave necessaria per avere libero il passo e su Turio, per la valle del Crati, e su Ipponio. Si capisce quindi perchè Alessandro il Molosso, muovendo contro costoro, conquistasse su di essi Terina. Infine collocando la città a Tiriolo acquisterà pieno valore la notizia. che Annibale costretto a rimpatriare ed a lasciare l'Italia " distrusse Terina, che non aveva modo di custodire „ come dice Strabone (3), comportandosi allo istesso modo, con il quale trattò i soldati ed i cavalli, che non potè seco recare in Africa, e che, come è noto, sgozzò prima di salpare (4).

Terina adunque è nominata in quasi tutte le principali fazioni militari, che ebbero luogo nella Magna Grecia dal secolo IV al II., e si presenta come una importante stazione strategica. A me sembra che non sia necessaria una gran dose di scienza militare per riconoscere, che essa non poteva essere collocata che su un luogo forte, e che non giaceva nella pianura del Lamato, sul fiume di S. Biase. Se essa fosse stata in quel punto, non si capirebbe ad es. come Annibale si desse il pensiero di distruggere un paese, che non valeva la pena di essere custodito, e che non aveva addirittura nessuna delle qualità strategiche, che Terina certamente possedeva (5).

(1) Polyaen, II, 10. 1.; Antioch. apd. Strab. VI, p. 264 C.; Diod. XIII, 106. 10.

(2) Diod., XVI, 15. 2: Καὶ πρῶτον μὲν Τερῖναν πόλιν ἐκπολιορκήσαντες, διήρπασαν, ἔπειτα Ἱππώνιον καὶ Θουρίους καὶ πολλὰς ἄλλας χειρωσάμενοι κοινὴν πολιτεῖαν συνέθεντο.

(3) Strab., VI, p. 256 C. Τερῖνα ἣν Ἀννίβας καθεῖλεν οὐ δυνάμενος φυλάττειν ὅτε δὴ εἰς αὐτὴν πατaπεφεύγει τὴν Βρεττίαν. Adunque fra il 207 ed il 203.

(4) App. *b. Ann.* 60; cf. Liv. XXX. 20.

(5) E appunto perchè sul golfo Ipponiate non v'era una città ed una posizione, che avesse carattere strategico, i Romani, allorquando dedussero una colonia militare a Crotone, ne dedussero pure un'altra a Temesa. v. Liv. XXXIV. 45. a. 194. a C.

Questi risultati, che a me paiono abbastanza sicuri, sono adunque in aperta contradizione con i precedenti, e tal contrasto renderà ancora più evidente quanto sono per dire.

Nel 1640 si scoprì a Tiriolo il testo del celebre senato consulto sui Baccanali dell'anno 186 a. C., in cui si dice che esso era promulgato " in agro Teurano „ v. C. I. L. X n. 104, e Strabone dice che ὑπὲρ δὲ τῶν Θουρίων c' era la Ταυριανὴ χώρα VI, p. 254 C. A me par certo, benchè altri ad es. il Mommsen pensi diversamente, che questo ager Teuranus non sia altra cosa che Tiriolo. Non ci deve recare meraviglia come la forma ellenica Τέρεινα o Τερῖνα si sia trasformata in modo da formare il nome, da cui derivò l'aggettivo Teuranus. A me sembra assai probabile che i Greci, che occuparono il luogo, abbiano così modificato il nome indigeno, che suonava Tauros (che ricompare nella forma Ταυριανὴ χώρα, e che si presenta di nuovo poco oltre nel Bruzzio ([1])), da dare alla nuova forma un significato (la Tenera) ([2]). E se anche ciò non fosse vero, non sorprende l'ipotesi che i Lucani o i Brezzi abbiano così modificato la forma ellenica da farne un ager Teuranus. Non furono i Lucani a formare l'orribile Paistum dall'ellenico Poseidonia?

Così non resto colpito dal fatto, che il senato consulto citato dimostra come a Tiriolo verso il 186 v' era non una città, ma un vicus. Questo fatto sarebbe anzi in perfetta armonia con il passo citato di Strabone. Terina non era stata distrutta da Annibale circa un ventennio prima della promulgazione di questo documento? Il fatto che anche a Tiriolo veniva promulgato il decreto contro una istituzione religiosa, che non poteva fiorire che in luoghi, ove era fitta e civile anzi corrotta la popolazione, non dimostra appunto che a Tiriolo, ove ora esisteva soltanto un vicus, aveva, per lo innanzi, fiorito una vera e propria città?

([1]) v. PLIN., N. H. III. 73 « Metaurus amnis Taurentum oppidum »; MELA, II. 68 « Taurianum et Metaurum » ossia il Ταυριανὸς σκόπελος di TOLOMEO III. 1, 9, che a torto gli scrittori calabresi confondono con l'isola di Terina. Il MOMMSEN, che a ragione, ad C. I. L. IX, n. 104, distingue questi luoghi dall'ager Teuranus, senza buoni motivi asserisce che o la Ταυριανὴ χώρα di Strabone era da questo diversa, o che il geografo greco indicò tal luogo « perperam omnino ». Strabone descrive sempre poco accuratamente e per sommi capi l'interno dei paesi; le sue parole poi a me pare non lascino dubbio, che egli intende ricordare l'ager Teuranus ossia Tiriolo.

([2]) La forma Τέρεινα del Pseudo Scimno non è errata. Essa è confermata da alcune monete v. IMHOOF-BLUMER, *Zur Münzkunde Grossgriechenlands, Siciliens* etc. nel vol. X della *Numis. Zeitschrift* di Vienna (1878) p. 25 estr.

Resto invece impressionato dal fatto che lo stesso Strabone, che sa di una Ταυριανὴ χώρα, parli pure (l. c.) di una Terina συνεχής a Temesa. È dunque evidente che si tratta di due luoghi diversi. Come pertanto coordinare risultati così opposti? Vi erano forse due Terine?

Io penso che in origine vi sia stata una sola Terina sulla vetta del monte Tiriolo, e che questa abbia dato vita alla seconda Terina, posta presso a S. Eufemia sulle sponde del Tirreno, e spero di rendere, per lo meno, probabile tale ipotesi.

Abbiamo veduto come Crotone fosse assoluta signora del golfo scilacino; essa poteva considerarsi in pari modo signora dell'ipponiate mediante l'alleanza di Temesa. Ma questa era troppo distante dal golfo ipponiate propriamente detto, perchè bastasse ad usufruire commercialmente la vasta e fertile valle, ove scorreva il Lameto. D'altra parte è evidente che, se Terina montana floriva, doveva pure cercarsi uno sbocco al mare; e questo sbocco non poteva essere sul golfo scilletino, dacchè ivi era Scilletio, l'antica città ionica, che aveva dovuto pure riconoscere la supremazia od il dominio di Crotone. Lo sbocco naturale, quello che doveva maggiormente attrarre i Terinei, anche per la maggiore fertilità dei campi, era certo la vallata opposta, accanto a quella della locrese Mesma, la più vasta del Bruzzio.

Sulle coste del Tirreno, verso S. Eufemia, dovette quindi sorgere, ben presto, un emporio terinese, allo istesso modo che sulla vicina marina sorse l'emporio ipponiate della montana Ipponio, e che sulle coste siciliane sorsero gli empori di Agrigento, di Erice e di Segesta. Alla istessa guisa che gli empori delle città della Sicilia testè ricordate mantennero il nome delle metropoli [1], così, secondo noi, l'emporio di S. Eufemia dovette serbare il nome di Terina. E può ben essere avvenuto che l'emporio abbia finito per sopraffare la città. Non è avvenuto lo stesso per Erice, ossia per S. Giuliano, che e nei tempi antichi e moderni fu e tornò a diventar deserto in causa delle condizioni pacifiche, che favorirono e favoriscono il commercio di Trapani?

Quali fatti abbiano potuto giovare a quella, che ormai chiameremo Terina marittima, a danno della Terina montana non è facile indagare,

(1) V. ad es. STRAB. VI, p. 272 C. per l' ἐπίνειον di Agrigento e per l' ἐμπόριον di Segesta; DIOD., XXIV. 11 per l' ἐμπόριον di Erice.

dacchè le notizie sulla storia della Magna Grecia sono sempre assai monche, e sopratutto per quel periodo, che dalla distruzione di Sibari va al tempo dei Dionisii. Nondimeno congiungendo le scarse notizie letterarie con i dati, che possiamo ricavare dalla numismatica, io spero di poter fare un poco di luce anche per questo lato.

Le monete di Terina del principio del V secolo sono un documento della floridezza della colonia di Crotone, e la leggenda NIKA attesta il trionfo della politica terinea ad un tempo e crotoniate (1). Le monete della metà dello stesso secolo tendono pure a dimostrare come Terina, al pari delle città siceliote, festeggiasse la caduta dei tiranni (2); infine quelle del IV secolo provano che essa partecipò con Reggio, Mesma e Locri agli stessi avvenimenti politici.

Noi sappiamo come Dionisio I. di Siracusa riuscì a soggiogare tutte le città greche poste ai fianchi della Sila meridionale ossia Reggio, Caulonia e Squillace, colonie di Crotone, Ipponio, e come gratificasse la sua alleata Locri, alla quale donò nominalmente il territorio delle città vinte ad eccezione di quello di Reggio. Più tardi la stessa Crotone fu espugnata dal grande tiranno. Nulla ci è pervenuto a proposito della sorte, che toccò Terina in questo tempo. Ma è possibibile che essa sola abbia potuto sfuggire alla sorte, che colpì le sue sorelle e la sua metropoli? Sul terzo degli stateri terinei di peso italico del tempo di Dionisio I. è impressa frequentemente la triskelis siciliana (3). Ciò ci conferma nella persuasione, che anche Terina dovette riconoscere la signoria siracusana.

Ma in quel tempo era di già decaduta la città posta sulla cima del monte? Una circostanza lo farebbe pensare. Dopo il 389 vinti gli Italioti

---

(1) Head, *op. cit.* p. 96 ad es. fig. 64. Io non esito ad attribuire la leggenda NIKA a vittorie di Terina e di Crotone insieme. Quali fossero queste vittorie e quali rapporti giuridici passassero tra la colonia autonoma, che batteva moneta e la metropoli, indago altrove. Qui mi limito a notare che dalla moneta Terinea della metà del V secolo, in cui si vede una fontana e la leggenda AΓH v. Garrucci, *op. cit.* p. 169; tav. 117. 5. si potrebbe indurre che Terina fosse già sulla riva del mare, dacchè quella fontana parrebbe essere la sorgente dei Bagni S. Eufemia, l'aquae Ange degli Itinerari. Questa identificazione è, del resto, tutt'altro che sicura, e se lo fosse che proverebbe? Nelle monete di Erice ad es. non si vede talvolta il granchio, simbolo del porto, posto ai suoi piedi? Terina non poteva ricordare in pari modo nelle monete un monumento, che possedeva nel suo emporio?

(2) Imhoof-Blumer, *Monnaies Grecques* (Amsterdam 1882) p. 11, n. 44.

(3) Head, *op. cit.* p. 98.

all'Eloro, soggiogate Ipponio, Caulonia e Squillace, Dionisio I. pensò di difendere con un muro l'istmo, formato dai golfi ipponiate e scilacino, per difendere i nuovi acquisti contro i Lucani, contro quegli invasori, con i quali egli stesso si era collegato nella comune guerra contro gli Italioti. Sappiamo da Strabone, che ci ha conservato questa notizia, che egli fu però obbligato di desistere da tale impresa per l'intervento di coloro, che erano al di là dallo stretto (ἀλλ' ἐκώλυσαν οἱ ἐκτὸς ἐπελθόντες) (1).

Chi erano costoro, che impedirono a Dionisio di proseguire l'opera? Lo dice chiaramente lo stesso Strabone, perchè asserisce che questo pensiero sorse a Dionisio allor che faceva guerra contro i Lucani (στρατεύσας ἐπὶ Λευκανούς). Ed è chiaro che non potevano essere altri che costoro; non certo i Crotoniati, testè umiliati per la sconfitta dell'Eloro e per la perdita delle loro colonie di Squillace e di Caulonia, e che minacciati essi stessi della loro autonomia e libertà non avevano nè l'animo nè le forze necessarie per opporsi al tiranno. È adunque probabile che i Lucani, impadronitisi di Terina montana fra il 389 ed il 379 a. C. (2), abbiano da questa impedita la costruzione del muro, che nuoceva ai loro disegni di ulteriore conquista e di invasione, e che sino da quel periodo l'emporio dei Terinei, ove trovarono rifugio secondo tutte le probabilità gl'Italioti di Terina montana, divenuto esso stesso città autonoma, incominciasse a battere moneta (3).

Una conferma di quanto abbiamo detto avremo dall'esame di quei stateri terinei di peso e di tipo corinzio, che sono stati giustamente confrontati con i simili stateri della stessa età, appartenenti a Locri ed a Reggio, e che furono battuti allorquando il corinzio Timoleonte liberò Siracusa dai tiranni (4). Questi stateri dimostrano all'evidenza, che Terina durante l'impero dei due Dionisii aveva seguite le sorti delle altre città vassalle del

(1) Strab., VI, p. 261 C.; cfr. Plin, N. H. III. 10. 95.

(2) Crotone fu presa da Dionisio solo verso il 379 a. C v. Unger, nelle *Sitzungberichte* dell'Accad. di Monaco di Baviera, 1876, p. 569 sg. Il tentativo di fare il muro attraverso l'istmo cade adunque fra il 389-388, in cui furono da lui espugnate Caulonia ed Ipponio (v. Diod., XIV, 106 sgg.), ed il 379.

(3) Si noti che il periplo del Pseudo Scilace §. 12, (composto come è noto verso la metà del IV secolo), mentre ignora la presenza dei Brezzi, pone Terina nella Lucania

(4) v. Head, *op. cit.* p. 86 sgg.; L'Imhof-Blumer, *Die Münzen Akarnaniens* nella *Nusmismatische Zeitschrift* di Vienna, vol. X (1878) p. 6 sg. estr., ha fatto notare come il Bruzzio sia una delle sei regioni, in cui compaiono monete di tipo corinzio, e precisamente a Locri, a Mesma, a Reggio, a Terina. Sono del resto noti i rapporti numerosi fra la numismatica locrense, ipponiate e terinese; basta rammentare le monete del IV secolo di Ipponio e di Terina con la leggenda ed il tipo della dea Pandina.

Bruzzio come Ipponio, Caulonia, Reggio, Mesma e Locri, al cui territorio essa fu forse nominalmente aggiunta al pari di Caulonia e di Ipponio (1). A me sembra evidente, che questi stateri vennero battuti a Terina marittima e non a Terina montana, la quale nella seconda metà del IV secolo (verso il 356 a. C.) venne strappata ai Lucani dai Brezzi, i discendenti degli antichissimi abitanti del paese, che la possedevano ancora, allorchè, sebbene per poco, ad essi la strapparono ed Alessandro il Molosso ed il grande Annibale.

Che l'emporio dei Terinei fosse diventato più importante della città, anche prima della distruzione di Annibale, prova il fatto che già Licofrone, verso la metà del II° secolo, collocava Terina sulla spiaggia del tirreno, e se consideriamo che il Pseudo Scimno, il quale segue Eforo, chiamava Terina παραθαλαττία, potremo essere indotti a reputare che ciò fosse già avvenuto ai tempi, in cui Alessandro il Molosso conquistò Terina montana (fra il 335 ed il 331 a. C., (2). Se teniamo presente questo fatto, vedremo esser sempre più probabile quanto testè dicemmo, che ai tempi di Timoleonte e di Dionisio II, anzi che sino da quelli del I. Dionisio, dal tempo della invasione Lucana, l'emporio dei Terinesi fosse diventato una città cospicua a danno della metropoli, la quale, pure continuando ad esistere, andò sempre più perdendo il carattere di città per assumere solo quello di fortezza, sino a che, per opera d'Annibale scomparsa anche questa, essa finì per diventare il semplice vico, l'ager Teurānus, ricordato nel Senatoconsulto dei Baccanali (3).

(1) v. DIOD., XIV, 106 sgg. Mesma non è nominata fra le città superate da Dionisio. Ma Diodoro dice che egli collocò quattromila Mesmei a Messana allorchè vi fondò una colonia militare, (XIV, 78 a 396 a. C.). È chiaro, e lo hanno prima di me veduto altri (ad es. MARINCOLA-PISTOIA, *Opuscoli* p. 215) che Mesma era caduta nelle mani del tiranno, il quale trasportò del pari in Sicilia gli abitanti di Caulonia e di Ipponio.

(2) È però vero che il PSEUDO SCIMNO dice: ib. παραθαλαττία anche Ipponio, posto poco meno di dieci kilometri dal mare, e che dai geografi sono descritte sulle coste del mare città terrestri come Erice e Agrigento, che ne distavano pure qualche chilometro. Per lo stesso principio poteva esser detta presso al mare anche la Terina posta a Tiriolo, dacchè da quel punto si dominano ambedue i golfi. Nondimeno, si badi, Terina è distante dal mare in linea retta circa 25 chilometri

(3) Non è lecito stabilire se della Terina montana o della marittima fosse quel terineo Elisio, la cui storia era raccontata da uno scrittore del IV secolo, da CRANTORE di Soli, dal quale la tolsero CICERONE *Tusc* I, 115 e PLUTARCO *ad Appoll.* 14.; ma è forse lecito riconoscere che era un cittadino della marittima quel Filippo Terineo, adulatore di Filippo il Macedone e di Alessandro, che da Demostene fu svergognato ad Olimpia v. PSEUD. PLUT. *Vit. Dem.* 23.

E se tutto ciò, che abbiamo esposto, è vero o, per lo meno, è degno di essere preso in considerazione, nella stessa parola di Tiriolo, che pare derivata dalla piena forma *Terèniolum*, troveremo un documento fonetico dell' impoverimento e del rimpicciolimento, che toccò alla già florida e potente città italiota (1).

---

(1) Accennerebbero alla grande importanza, che Terina ebbe nell'antichità, le parole che a lei si riferiscono di Apollonide Niceno apd. Steph. Byz ad v. Τέρινα = M. *F. H. G.* IV, p. 310: ἐκαλεῖτο δὲ καὶ μεγάλη Ἑλλάς. Ma queste parole, sulle quali il Rathgeber, *op. cit.*, ha fondato un romanzo, se non corrotte, paiono, per lo meno, mutile.

III.

LA LEGGENDA DI EUTIMO DI LOCRI

ED IL SUO SIGNIFICATO PER LA STORIA DELLA MAGNA GRECIA

Pausania, ove discorre delle statue dedicate in Olimpia dagli atleti vincitori, ricorda anche quella di Eutimo Locrese, fatta dal celebre scultore Pitagora di Reggio, e coglie l'occasione per narrare un racconto riferito anche da Eliano e da Suida, e che noi, attenendoci al periegeta, ripetiamo brevemente: Ulisse nelle sue peregrinazioni avrebbe toccate anche le sponde di Temesa, ove uno de' suoi compagni, avendo violata una vergine, venne lapidato dagl' indigeni. Ma il δαίμων dell' ucciso incominciò a vendicarsi così ferocemente dei Temesani, che costoro aveano deliberato di abbandonare l' Italia. Un responso dell' Apollo Pitico però li indusse a rimanere ed a placare l' eroe con un tempio e con l' annuo sacrificio di una fra le più belle vergini. Eutimo Locrese, figlio del fiume Cecina, che divide il territorio reggino dal locrense, reduce dalle vittorie riportate ad Olimpia nel pugilato, giunse a Temesa proprio nel momento, in cui all' eroe si offriva la consueta vittima. Chiese ed ottenne di essere introdotto nel tempio, ove, vista la fanciulla, perchè l'amore succedette alla compassione, egli decise e di vincere l'eroe e di sposarla. Si arma, attende di piè fermo l'eroe, lo caccia dal paese e lo obbliga di gettarsi in mare. Eutimo poi celebrò splendide nozze. Tanto dice Pausania di avere udito (ἤκουσα), ma aggiunge, e qui citiamo le sue parole " mi ricordo di essermi imbattuto in " una pittura riprodotta da un antico esemplare. V' era disegnato il gio- " vane , ossia Eutimo " Sibaris, il fiume Calabro, la fonte Lyca, presso al " tempio dell' eroe la città di Temesa, e fra questi il δαίμων cacciato da

" Eutimo dipinto di un color fosco e nero e affattot erribile d' aspetto,
" che era rivestito d'una pelle di lupo. e sulla pittura v'era anche scritto
" il nome Alibante „ VI. 6. 4. sgg. (1).

Il personaggio di Eutimo, benchè involuto dalla leggenda, è perfettamente storico, come è storico il fatto della statua erettagli da Pitagora di Reggio (2). Ma che anche nel racconto della sua lotta con l'eroe di Temesa vi si asconda alcun che di reale dimostra un passo di Strabone, il quale, parlando di questa città, così dice: " Presso Temesa v' è circondato da
" un bosco di olivi selvatici l'eroe di Polite, uno de' compagni di Ulisse, che,
" ucciso a tradimento dai barbari, divenne così desideroso di vendetta da
" obbligare quelli, che abitavano quelle regioni, a pagargli per volontà di
" un oracolo il tributo, e da dare origine al proverbio, che si sente dire,
" quando si parla di un uomo privo di compassione: vi è entrato l' eroe
" di Temesa. Ma avendo i Locresi Epizefirii presa in guerra questa città,
" si racconta che Eutimo il pugilatore venisse a tenzone contro di lui, e
" che vintolo lo obbligasse a restituire il tributo agli indigeni „ VI. p. 255 C. (cfr. Ael. l. c.) (3).

Il racconto di Pausania collima con quello di Strabone e deriva assai probabilmente da una fonte comune. Il passo di Strabone ha pure il vantaggio di offrirci un dato in più; di farci constatare che non si tratta di un solo mito, ma che questo va congiunto con un fatto interamente storico, ossia con la conquista di Temesa per parte dei Locresi, capitanati, probabilmente, dal pugile Eutimo, come i Crotoniati lo furono dall'atleta Milone nella lotta contro Sibari. Ed è pure probabile che il tributo, che Eutimo volle venisse restituito. fosse un vero e proprio tributo, che i Temesani pagavano a Cro-

(1) G. Suid. ad v. Εὔθυμος, che o compendia Pausania o la fonte comune, e che con forma più corretta chiama 'Αλύβας il demone, che nei codici di Pausania è certo erroneamente detto Lica o Libante cf. Ael. V. H, VIII. 18; Prov. Alex. 131.

(2) La base della statua di Eutimo con l'indicazione, che era opera di Pitagora, ivi detto samio, venne trovata negli scavi di Olimpia v. *Inscr. Gr. Ant.* del Roehl n. 388, v. Loewy *Inschr. griech. Bildhauer* (Leipzig 1885) p. 19 sg.

(3) Un raffronto parziale di questi due passi fece il Marincola-Pistoia, *Opuscoli di Storia Patria* (Catanzaro 1871) p. 105, il primo fra i dotti calabresi, che abbia riconosciuta l'importanza di questo racconto per la storia di Temesa.

tone, che dalla metà circa del secolo VI di Temesa divenne o l'alleata o la signora. Temesa, come diremo anche in seguito, non era in origine una città achea, ma passava per una colonia o di Etoli o di Focesi (1).

È pertanto naturale, che noi tentiamo indagare con quali altri fatti si colleghi la conquista di Temesa da parte dei Locresi ed in quale tempo essa sarebbe avvenuta, tanto più che una simile ricerca, a nostra cognizione, non è stata ancora tentata.

Pausania, dopo aver asserito che Eutimo fu dichiarato vincitore al pugilato, nelle Olimpiadi 74, 76, 77, ossia negli anni 484, 476, 472 a C. dice: ἐπανήκων δὲ ἐς Ἰταλίαν τότε δὴ ἐμαχέσατο πρὸς τὸν Ἥρω VI. 6. 7. Che Eutimo abbia vinto proprio tre volte ad Olimpia come dice Pausania è confermato dall' epigramma di Eutimo testè riferito (Roehl op. cit. n. 388. Εὔθυμος Λοκρὸς Ἀστυκλέος τρὶς Ὀλύμπι' ἐνίκων κτλ). Secondo Suida però l. c. le tre vittorie sarebbero state di seguito, dopo la sconfitta, che ad Eutimo dette Teagene Tasio, che, secondo Pausania, vinse nell'Ol. 75=480 a C. e quindi nell'Olimpiadi 76=476, 77=472, 78=468. Però un confronto fra il testo di Pausania e quello di Suida rende assai probabile che Suida abbia male compendiato o Pausania, che spesso pare abbia direttamente compilato, o la fonte comune. Stando però alle parole di Pausania a prima vista dovremo concludere che Eutimo giunse a Locri dopo il 472. Ma se si esamina con più attenzione questo passo, saremo obbligati a modificare il nostro giudizio. Eutimo non rimase certo ad Olimpia dal 484 al 472, ma secondo tutte le probabiltà ritornò tutte e tre le volte in patria. L'espressione ἐπανήκων è vaga e generale e può riferirsi tanto all'anno 484, quanto al 476, come al 472. Ma benchè vaghe le indicazioni di Pausauia sono sempre preziose, dacchè da esse ricaviamo che Eutimo vinse Temesa appunto nel tempo, in cui a Siracusa dominavano i Dinomenidi. Gelone infatti regnò dal 484 al 478, ed il fratello Jerone morì nel 467.

Ed è appunto lo studio della politica italiota di questi principi ed il

(1) Temesa era colonia di Etoli guidati da Toante, secondo la fonte di Strabone VI. p. 255 C.; di Focesi guidati da Schedio e da Epistrofo, nipoti del Focese Naubulo, e venuti dal golfo Criseo, secondo quella di Licofrone v. 1067 sgg. La leggenda di Toante, se non mi inganno, ha un' origine achea, e deriva dalla dominazione crotoniate nella città. Toante era infatti un eroe degli Achei del Peloponneso v. PAUS, V. 25. 8. sg. cf. *Il.* VII 168.

contegno da essi tenuto verso Locri, che ci farà comprendere interamente il significato della presa di Temesa per parte dei Locresi.

Temesa, fino dal secolo precedente, era o una colonia o una città alleata di Crotone. Lo mostrano gli stateri d'argento incusi, che hanno il nome delle due città; stateri, che durarono fino al principio del secolo seguente (1). L'assalto di Locri era pertanto diretto contro Crotone, la quale, sino dalla metà del secolo scorso, aveva, ma invano, tentato di soggiogare i Locresi, che sulle sponde della Sagra avevano saputo mirabilmente difendere la loro libertà. Ma laddove alla battaglia della Sagra i Locresi avevano avuto per alleati i Reggini, ora anche questi erano diventati loro fieri nemici. Fra il 478 ed il 476, Anassilao, il potente signore di Reggio, era in guerra con essi, e solo l'intervento di Jerone li obbligò a rispettare gli alleati di Siracusa (2). Nell'anno 476 i Crotoniati erano in guerra contro i Sibariti, ed anche costoro furono salvati dalla rovina dall' intervento di Jerone (3).

Parmi pertanto che non sia necessario un grande senso politico per ristabilire mediante queste notizie, apparentemente isolate e frammentarie, e che sono invece fra loro concatenate, che i Reggini ed i Crotoniati erano comuni nemici dei Locresi, e che la presa di Temesa fatta da costoro non fu che un episodio di questi avvenimenti.

Erodoto ci ha conservata la notizia, che i Cartaginesi furono indotti ad assalire Terone di Agrigento da Anassilao di Reggio, genero di Terillo, cui Terone aveva cacciato da Imera (VII. 165). La battaglia Imera (480 a C.) mandò però a vuoto i disegni di Anassilao e confermò la potenza di Terone e quella di Gelone a Siracusa. Era naturale che Gelone dovesse ora far pagar caro ad Anassilao l'essersi adoprato efficacemente, anche con il dare come ostaggi i propri figli, perchè i Cartaginesi intervenissero nelle faccende siceliote. E benchè sia detto che Gelone si mostrò generoso con lui (4),

(1) V. Head. *op. cit.* p. 80, 96.

(2) V. Sch. Pynd. *Pyth*, 1, 89; II. 34; Jerone salì al trono nel 478 (Diod. XI 38); nel 476 Anassilao morì (Diod. XI. 48).

(3) V. Diod. XI. 48; Sch. Pynd. *Ol.*. II. 29.

(4) Ciò almeno Diodoro, XI. 66, fa dire da Jerone ai figli di Anassilao suoi cognati; ciò proverebbero anche i legami di parentela stretti fra Jerone ed Anassilao.

nulladimeno è chiaro, che egli mirò a trar frutto della vittoria ed a mischiarsi alla sua volta nelle faccende d'Italia. Duride Samio, lo storico di Agatocle, raccontava che presso ad Ipponio v' era un sacro bosco, in cui sorgeva un edificio, intitolato il Corno di Amaltea, e che era stato eretto da Gelone (1).

Da questa notizia non siamo certo autorizzati a ricavare che Ipponio fosse caduta sotto la dominazione del Dinomenide (2); da essa però rileviamo che Gelone con il beneficare Ipponio, la colonia di Locri, si faceva iniziatore di quella politica italiota, che fu continuata dal fratello Jerone, allorchè intervenne a favore di Locri, e che fu seguita per filo e per segno da Dionisio I, allorchè questi di Locri si fece gradino per giungere a dominare le città italiote. Noi sappiamo che Dionisio premiò Locri della sua fedeltà con il donarle il territorio delle colonie crotoniati di Caulonia e di Squillace e forse, come dicemmo altrove, le dette anche quello della crotoniate Terina. Or bene al tempo dei Dinomenidi noi vediamo i Locresi assaltare e rendersi signori di Temesa, che era pure o una colonia od una città alleata di Crotone. I Locresi erano evidentemente appoggiati, anche questa volta, da Siracusa; mercè l' alleanza con questa riuscì loro di conseguire gli stessi fini contro gli stessi nemici e nel secolo V e nel successivo.

Una conferma delle cose asserite avremo nella seguente notizia, che ci è del pari serbata da Pausania. Egli dice che Astilo crotoniata per tre volte fu dichiarato vincitore allo stadio di Olimpia, ma che la seconda e la terza volta egli in grazia di Jerone si fece proclamare non crotoniata ma siracusano, ed aggiunge che i Crotoniati perciò resero infame la casa sua destinandola ad uso di carcere, e gettarono al suolo la di lui statua, opera di Pitagora di Reggio, che egli aveva dedicata nel tempio di Era Lacinia (3). Astilo vinse nelle Olimpiadi 73 = 488 a. C: 74 484 = 75 a. C.

(1) Durid. apd. Athen. XII. p. 512. A. = M. *F. H. G.* III. p. 479. n. 441.

(2) Mi pare che ecceda l'Holm. *Gesch Sicil.* I. p. 211, che da questo fatto è indotto a dire « Wir haben sogar Spuren, dass Gelon ausser dem groessten Theile Siciliens auch eninen Theil von « Italien beherrschte ».

(3) Paus. VI. 13. 1. Una delle vittorie di Astilo fu cantata da Simonide v. Bergk *Poet. Lyr. Grec.* III4 p 391 fr. n. 10.

— 480 (¹). Parmi pertanto si possa ricavare che prima del 480 i Crotoniati non fossero ostili a Siracusa (altrimenti non avrebbero concesso ad Astilo di collocare nel tempio di Era la statua, che gli avea fatto Pitagora di Reggio) e che le deliberazioni ostili ad Astilo, che si era dichiarato siracusano sino dal 484, venissero prese dopo il 480, in cui egli riportò la terza vittoria, che è pur l'anno della battaglia di Imera, dacchè appunto dopo quella vittoria i Siracusani intervennero direttamente e da padroni nelle faccende d'Italia.

I Crotoniati aveano ragione di esser sdegnati contro Siracusa, dacchè l'aiuto recato ai Locresi e la perdita di Temesa era per essi di un danno inestimabile. Temesa era situata in tal punto, che assicurava a Crotone un'utile concorrenza commerciale alle città calcidiche signore dello stretto di Messina. Perderla significava non avere più libero l'accesso alle coste del Tirreno.

A partire da questo tempo noi non abbiamo più monete di Temesa, e solo verso il 480 incominciano invece quelle di Terina. I dati numismatici sono in perfetta armonia con quelli serbati dagli autori.

Temesa era in potere dei Brezzi verso la metà del IV secolo, ed a costoro venne tolta da Annibale. Temesa, del resto, continuò ad esistere come colonia romana, e lo stesso Pausania (posto che qui dia realmente un'informazione personale e non riferisca materialmente la sua antica fonte) asserisce che era ancora abitata al tempo suo (²). Se essa dopo il 480 cessò di batter moneta, di ciò la ragione sta evidentemente nel fatto, che essa venne in potere dei Locresi, i quali non coniarono moneta nè in casa propria, nè nelle colonie di Mesma e di Ipponio. È noto che solo verso la metà del IV secolo principia la numismatica di queste città (³).

I Crotoniati, secondo ogni probabilità, cercarono di por rimedio al danno patito con la fondazione di Terina. La nuova città, che dominava l'istmo formato dai golfi ipponiate e scilacino, e che proteggeva la via,

---

(¹) V. Eus. ed. Schoene I. p. 203.

(²) V. Strab. VI p. 255 C; ; Paus. *l. c.*

(³) Un fenomeno analogo presenta Sparta, la quale non incominciò a battere moneta che alla fine del IV secolo, dal re Areo v. Head, *op. cit.* p. 363 sg.

che conduce all' ionio ed a Crotone, era un punto di offesa verso la valle del Lameto, che tornò certo, con il tempo, in potere di Crotone. Così è probabile che in potere della città achea tornasse anche Temesa, allorchè con Jerone e Trasibulo sparì la potenza dei Dinomenidi e quella di Locri. E si comprende perchè Temesa, benchè fosse uscita di mano dei Locresi, non battesse più moneta. Nella valle del Lameto si atteggiava ormai a signora Terina, che non tollerava che a lei accanto vi fosse uno stato autonomo e rivale.

Abbiamo veduto come verso gli stessi anni e forse nello stesso anno, in cui Jerone interveniva a favore dei Locresi, si adoperasse pure a pro dei Sibariti, minacciati da Crotone. I Crotoniati erano pertanto comuni nemici di quelle due cittadinanze. Possiamo supporre che i Locresi fossero in quel tempo divenuti amici dei Sibariti, che vivevano nelle loro colonie di Lao e di Scidro (Herod. VI 21) e forse anche a Poseidonia (v. oltre mem. IV.).

Una conferma a questa supposizione avremmo forse anche nella leggenda di Eutimo. Pausania infatti, come vedemmo testè, asseriva di essersi imbattuto in un dipinto, in cui erano rappresentate tutte le persone, tutti gli elementi, che compaiono nella leggenda da lui riferita; ossia Temesa, il tempio dell' eroe, il δαίμων, la sorgente Lica, il fiume Calabro, infine il νεανίσκος ossia Eutimo, e Σύβαρις. A me sembra che Sybaris non possa, qui, essere altra cosa che il nome della fanciulla liberata.

Ma abbiamo già osservato come nella leggenda di Eutimo e della lotta contro il δαίμων sia esposto poeticamente un fatto storico, ed abbiamo creduto di poter stabilire che in esso è involuto la conquista di Temesa per parte dei Locresi guidati da Eutimo. Abbiamo inoltre pensato esser probabile che il tributo, richiesto dal δαίμων e che Eutimo ottenne venisse restituito, voglia indicare un vero tributo imposto alla città da Crotone. Pochi, io penso, saranno propensi a credere che Eutimo contrasse vere nozze con Sibari, la fanciulla liberata dal δαίμων. Non è assai più naturale pensare che anche il nome di questa fanciulla, di questa Σύβαρις sia del pari mitico?

Per ben comprendere il valore di questo quesito è necessario riferire una leggenda analoga alla nostra, conservataci da Antonino Liberale,

il quale la tolse a Nicandro, che forse l'udì nello stesso paese, in cui essa era sorta.

Presso il Parnasso e Crissa nel monte Cirfis, diceva Nicandro, v' era un antro, nel quale abitava un mostro, detto Lamia o Sibari, che rapiva e divorava bestiami ed uomini. I Delfi già pensavano di mutar sede e consultarono a questo proposito il dio, il quale impose loro di esporre all'antro il figlio di uno dei cittadini. La sorte cadde su Alcioneo, che circondato il capo di corone veniva condotto alla spelonca di Sibaris. Ma Euribato, figlio di Eufemo, che traeva la sua stirpe dal fiume Axius, spinto da qualche δαίμων, si imbattè nella giovane vittima, ed innamoratosi di lei le tolse dal capo le corone e volle in suo luogo esser condotto alla spelonca. Ove entrato si impadronì di Sybaris, cui tratta alla luce precipitò dalle rupi. Costei si sfracellò il capo su di un sasso, d'onde sgorgò una fonte, che dal nome di lei era appunto detta Sybaris. E da questa, conchiudeva Nicandro, trassero il nome que' Locresi, che fondarono la città di Sybaris in Italia. (Antonin. VIII).

I punti di contatto non potrebbero essere maggiori; basti fare osservare come allo stesso modo che Euribato, benchè figlio di Eufemo, trae la sua origine dal fiume Axius, così Eutimo Locrese, benchè figlio di Asticle, (v. inscr. cit.; cfr. Paus. l. c.) nondimeno veniva reputato figlio del fiume Cecina. Il ritrovare la stessa leggenda ed a Temesa e nella Locride non desta alcuna maraviglia. Il Parnasso sorgea fra il paese dei Focesi e dei Locresi Ozoli, dei quali i Locresi Epizefirii nell'Italia erano una colonia (1). Temesa stessa passava per essere stata anticamente colonizzata dai Focesi della Focide. È adunque affatto naturale che in paesi abitati

(1) Se i Locresi Epizefirii fossero di origine Opunzi od Ozoli si disputava di già nell'antichità e Strabone (o diremo meglio la sua fonte) si opponeva ad Eforo, che li credeva venuti dall'Oponzia VI. p. 259 C; cfr. Pseud. Scym. v. 316. sq. Non so se sia di già stato notato come dimostri, in modo definitivo, che i Locrensi Epizefirii erano, nella maggior parte almeno, Ozoli, il passo di Pausania, ove si dice che nel tesoro de' Sicioni ad Olimpia v'era un ἄγαλμα πύξινον Ἀπόλλωνος ἐπιχρύσου τὴν κεφαλήν, che vi avevano dedicato i Locresi d'Italia, e che era opera di Patroclo di Crotone. VI. 19. 6. Benchè questo Patroclo sia ignoto, ed ignota l' età, in cui visse, nondimeno non puó dubitarsi dalla natura del lavoro, che tale ἄγαλμα fosse di arte arcaica, e la amicizia dei Locresi Epizefirii con i Sicioni trova una plausibile spiegazione nella relazioui, che dovevano congiungere questi due popoli, che abitavano le sponde opposte del seno corinzio.

dalle stesse genti si ritrovi un mito originario della Grecia. Ci colpisce nondimeno la somiglianza del nome del mostro Sibari con quello della città achea e sopratutto l'asserzione di - Antonino Liberale, che quello diè origine alla fondazione della locrense Sibari in Italia, tanto più che Solino, parlando della fondazione delle colonie elleniche in Italia, in un luogo, in cui riferisce tradizioni, che derivano da buone fonti, e delle quali alcune ci sono serbate anche da altri scrittori degni di fede, asserisce che Sibari fu fondata: " a Troezeniis et a Sagari Aiacis Locrii filii „ II 10, ed Mommsen.

È proprio vero che Locresi parteciparono alla fondazione di Sibari? Per me non trovo nulla, che c' autorizzi a reputare falsa una simile asserzione. Lo stesso Aristotele dice che i Trezenii avevano preso parte alla fondazione di Sibari, (v. oltre); se Solino, o la sua fonte, in questo si trova d'accordo con il grande filosofo, perchè dovremmo credere senz'altro che egli sia caduto in errore nel riferire che a Sibari giunsero anche Locresi? E questo particolare non è confermato dalla osservazione testè riferita di Nicandro? uno scrittore che, come è noto, era assai bene informato della storia delle stirpi della Grecia settentrionale? D' altra parte che v' è di strano nell' ammettere che gli Achei, che fondarono Sibari, abbiano chiamato a far parte della loro colonia anche de' Locresi Ozoli, che abitavano lungo le coste del golfo corinzio, da uno stretto braccio di mare divisi da Elice, la metropoli di Sibari, la quale era situata proprio di fronte ad essi? Non è la caratteristica di tutte le colonie greche, come in generale di tutte le colonie, che si fondarono e che si fonderanno, l'essere costituite di elementi misti (1)?

Nel caso nostro se realmente Sibari ebbe un contingente locrese nella sua popolazione, comprenderemmo, ancor meglio come i Locresi ed i Sibariti verso il 476 potessero essere collegati. Alle ragioni politiche del presente si sarebbero aggiunte quelle determinate dalla tradizione e dalla affinità. Nondimeno siamo ben lungi dall' asserire che ciò sia proprio vero. Questa tradizione può avere avuto origine da fatti politici posteriori.

---

(1) Così è degno di nota che Licofrone v. 1075 sqq. riferisce la leggenda della troiana Setea, perita a Sibari, ove parla di Temesa e della colonia focese dei Naubolidi.

Allo stesso modo che l'alleanza fra Siracusa e Locri nel secolo V ha forse dato origine alla notizia probabilmente derivata da Antioco Siracusano, che le due città fossero amiche fino dal tempo, in cui vennero fondate; alla stessa maniera che l'alleanza fra Taranto e Reggio del 473 diè forse vita alla tradizione, che Taranto fosse stata fondata da quei cittadini, che non vollero prender parte alla spedizione contro i Messeni, così può darsi che l'alleanza del 476 fra i Sibariti ed i Locresi abbia dato luogo alla tradizione, che i due popoli avessero in origine fondata Sibari.

Ma qualunque sia il giudizio, che si debba o che si possa recare su questa intricata questione, resta pur sempre probabile, per quanto a noi pare, che il nome di Sybaris nel dipinto citato da Pausania si riferisca ai legami di alleanza, che stringeano Locri ai Sibariti verso il 476 a C. (1).

La leggenda di Eutimo e quella di Euribato sono degne di studio per altri riguardi. È difatti assai interessante constatare come una leggenda o focese o locrese, localizzata nella Magna Grecia, si sia fusa con il mito delle avventure di Ulisse, e come infine un fatto storico sia stato adornato e rivestito con le sembianze di quei due miti stessi tra loro combinati. Eutimo, un personaggio perfettamente storico, no nsi reputa più il figlio di Asticle, ma diventa addirittura il figlio del fiume, che divide il territorio dei Locresi da quello dei vicini Reggini. Egli non vien raggiunto dalla morte, ma, dopo una lunghissima vita, diventa addirittura un eroe di natura diversa dalla mortale. E con la leggenda, o udita da Pausania ad Olimpia o più probabilmente da lui riferita secondo una vecchia fonte (secondo Polemone), concorda e il breve e succinto racconto di Eliano, il quale aggiunge che Eutimo disceso alle sponde del Cecino scomparve, e quanto cantava Callimaco citato da Plinio il naturalista, al quale appartengono le parole che seguono: " Consecratus est vivos sentiensque eiusdem ora-

---

(1) PAUSANIA VI. 19. 9. dice che secondo alcuni autori l'antico nome di Lupiae (Lecce) era Sibari. Tenendo ora presente un passo di IGINO ap. SERV. *ad Aen.* III. 553: « Aulon mons est Calabriae in quo oppidum fuit a Locris conditum » cf. HORAT. *carm.* II. 6. 18, e quello di GUIDONE ed. Parthey 67. p. 502: « regionem Solentinam (sic) quae et Locria antiquitus dicta est, provincia Apulia est » potrebbe pensarsi che la Sibari di Nicandro, fondata dai Locresi in Italia, fosse quella della penisola sallentina. Ma ed il passo di Solino, ed il confronto della leggenda di Euribato con quella di Eutimo, e quanto altro abbiamo fin qui osservato, mi dispensano dal confutare questa supposizione.

" culi (i. e. Delphici) iussu et Jovis deorum summi adstipulatu Euthymus " pycta, semper Olympiae victor et semel victus. patria ei Locri in Italia. " ibi imaginem eius et Olympiae alteram eodem die tactam fulmine Calli- " machum ut nihil aliud miratum video ad eumque iussisse sacrificare, " quod et vivo factitatum et mortuo, nihilque de eo mirum aliud quam " hoc placuisse dis „ N. H. VII. 47, 152 (1).

La diffusione della leggenda di Eutimo, non meno che del proverbio sull'eroe di Temesa, è un chiaro indizio che essa fu presto oggetto di trattazione letteraria, e forse sino dalla sua origine essa fu un prodotto letterario. È noto come Stesicoro di Imera, di nascita metaurino, ossia cittadino di una colonia di Locri (2), cantasse la vittoria della Sagra nella palinodia, e come raccontasse anche le avventure di Leonimo, il duce crotoniate, che ferito da Aiace, il dio protettore dei Locresi, dovè recarsi a Leuce, nell'isola di Achille sul Ponto, ove venne sanato della piaga, ed ove vide anche Elena, che gli diè la famosa ambasciata per il poeta (3). Nasce spontaneo il sospetto che la vittoria dei Locresi e di Eutimo a Temesa abbia fornita l'occasione ad un poeta della scuola di Stesicoro o di Senocrito di Locri di comporre un simile epinicio, in cui elementi reali e fantastici, storia e mito, venissero parimenti fra loro confusi (4).

---

(1) cfr. SCHNEIDER *Callimachea* II. p. 579 fr. 399; forse ad Eutimo si riferiva anche il fr. 493 p. 650: ὁ δ' ἐκ Λοκρῶν τείχεος Ἰταλικοῦ παρ' ********* ἧεν ἀμύντωρ; cfr. BERGK *Ant. Lyr.* II. *praef.* p. XVIII.

(2) v. SUID. ad v. Στησίχορος; STEPH. BYZ. ad v. Μάταυρος.

(3) PAUS. III. 19. 11; cfr. BERGK, *Poet. Lyr. Graec.* III⁴ p. 218 sg.

(4) Secondo l'esplicita ed autorevole testimonianza di GLAUCO DI REGGIO apd. PLUT. *de mus.* 10 M. *F. H. G.* II. p. 24 fr. 4. di Senocrito di Locri, si diceva ἡρωικῶν γὰρ ὑποθέσεων πράγματα ἐχουσῶν ποιητὴν γεγονέναι. Siccome Pausania, ove dice che Eutimo era figlio del fiume Cecino, ricorda che le cicale delle due sponde del fiume erano vocali o no, e siccome la storia delle cicale riferita da Timeo v. fr. 64, 65 in M. *F. H. G*, I. p. 206 sg. si riconnette forse ai canti del poeta locrese Eunomo, intorno alla cui età non possediamo notizie di sorta, così si potrebbe supporre che in questo passo Pausania riferisse notizie, le quali, indirettamente ad es. per mezzo di Polemone e in ultima analisi per mezzo di Timeo, derivassero da un epinicio di Eunomo. Nondimeno è a notare che Timeo (sia presso STRABONE VI. 260 C. sia presso ANTIGONO CARISTIO I.) non facea menzione delle cicale vocali locrensi a proposito del fiume Cecino, bensì dell'Halex, che da TUCIDIDE (III. 99) è ricordato distintamente dal Cecino (ib. 103) benchè e l'uno e l'altro faccia scorrere nel territorio locrense.

Il racconto di Pausania ha infine un altro pregio. Il dipinto veduto o da lui o dalla sua fonte era, a sua stessa confessione, la riproduzione di un originale antico. Lascio agli archeologi dell'arte investigare quanto valore abbia questa notizia per la storia della pittura, a me basti qui ricordare come nel dipinto di Pausania fosse ricordato il fiume Καλαβρός presso Temesa. È noto come i Romani chiamassero Calabria la Japigia, e si ammette generalmente che il nome di Calabria sia passato al Bruzzio fra il VI ed il VII secolo.

Or bene il racconto di Pausania ha anche il merito di farci meglio comprendere come sia potuto avvenire il passaggio da un nome all'altro, e porge un altro argomento favorevole alla tesi del Mommsen, che noi accettiamo, che prima dell'arrivo dei Greci nell'Italia Meridionale abitasse un sol popolo di stirpe Japigia, che dal golfo di Taranto si stendeva sino allo stretto di Messina (1).

Secondo Eliano *l. c.* il Cecino ἐστὶ πρὸ τῆς τῶν Λοκρῶν πόλεως, secondo Pausania invece questo fiume, che egli è il solo a chiamare Καικίνης, divideva il territorio de' Locresi da quello dei Reggini. La circostanza che Filisto apd Steph Byz ad v. M. *F. H. G. I.* p. 86 fr. 10 sapeva di un Καίκινον χωρίον 'Ιταλικὸν può forse recarsi a favore di Pausania, il quale però dipende dalla istessa fonte di Eliano. É tuttavia ovvio pensare che le parole di lui rispetto alla posizione del Cecina ed alla storia delle cicale siano dovute ad una *contaminatio* di due diversi racconti fatta dallo stesso Pausania. Nulla possiamo adunque supporre intorno all' autore dell' epinicio. Colgo poi l' occasione di rammentare che se accettassimo la correzione del Coray, che alle parole di Pausania Λύκα πηγή sostituisce Καλύκα πηγή avremmo un altro richiamo alla scuola di Stesicoro, il cantore di Καλύκη ossia dell'amante di Euatlo v. Bergk *Poet. Lyr. Gr.* III[4] p. 222 fr. 43.

(1) Mommsen, *Unterit. Dialekte.* p. 97 sg.

IV.

TREZENE COLONIA DI MARSIGLIA IN ITALIA

Stefano Bizantino ad v. Τροιζήν dice πόλις Πελοποννήσου. Ἔστι καὶ ἄλλη Τροιζὴν ἐν Μασσαλίᾳ τῆς Ἰταλίας ἣν Χάραξ Τροιζηνίδα χώραν φησί. La stessa notizia è riferita da Eustatio (ad *Il.* II. 561, p. 287, 12) con queste parole ἔστι δέ, φασί, καὶ ἑτέρα (i. e. Τροιζήν) ἐν Ἰταλίᾳ Μασσαλιωτική. C. Müller, (ad F. H. G. III. p. 645 n. 55) nel riferire questa notizia osserva: Expectabam ἐν Γαλλίᾳ. Ceterum locus ignotus nisi idem forte est cum Tauroente quem Apollodorus dicit apud Steph, B. v. Ταυρόεις. Il Müller ha perfettamente ragione: di questa Trezene italica non è fatta altrove menzione. Se nulladimeno, nelle righe che seguono, io mi propongo di identificarla con Poseidonia, la nota città italiota, io non intendo fare altro che esporre alcune congetture, che sottopongo al giudizio di coloro, che, al pari di me, si occupano di questi studî.

Pausania, II, 30. 10, accenna alle varie colonie dedotte dai Trezeni, ma a noi non è dato di ritrovare ricordi di esse, in Occidente, che a Sibari. Aristotele infatti, nella Politica, ove discorre delle sedizioni sorte nelle città, che accolsero forestieri come cittadini, cita come primo esempio Sibari: οἷον Τροιζηνίοις Ἀχαιοί συνῴκισαν Σύβαριν, εἶτα πλείους οἱ Ἀχαιοὶ γενόμενοι ἐξέβαλον τοὺς Τροιζηνίους· ὅθεν τὸ ἄγος συνέβη τοῖς Συβαρίταις. V. 2. 10.

Ove andarono i Trezeni cacciati di Sibari? Io suppongo che essi abbiano allora occupata Poseidonia, la città italiota, sulle coste della Lucania. Vero è che Strabone asserisce che Poseidonia fu fondata dai Sibariti (VI. p. 252 C), ma Solino, il quale serba alcune buone notizie sulla fondazione delle colonie greche in Italia, e che sa anche della partecipazione dei Trezeni alla colonia di Sibari, dice che Poseidonia fu fondata „ a Dorensibus „ II. 10. ed. Mommsen, parole, che non si possono riferire agli Achei di Sibari, dacchè è noto che, sebbene in età storiche tanto gli Achei del

Peloponneso quanto quelli della Magna Grecia usassero un dialetto analogo al Dorico, nondimeno gli antichi li consideravano di stirpe eolica (1). Questa espressione " a Dorensibus ", per vero dire, non si potrebbe nemmeno riferire a Trezene, se si tenesse conto che essa, in origine, era una città ionica (2). Ma tant' è, dopo la conquista dorica, era diventata in fondo dorica anche essa, ed a questa stirpe potevano ormai appartenere o tutti o parte dei coloni, che o nell' VIII o nel VII secolo mossero alla volta di Sibari. In quanto a Poseidonia non sappiamo il tempo della sua fondazione: certo esisteva sino dal secolo VI (3). Può ben darsi del resto che le due notizie di Strabone (Eforo) e della fonte di Solino possano conciliarsi: Poseidonia può essere stata in origine una colonia di Sibari, e più tardi in essa poterono stabilirsi i Trezeni, cacciati dalla città achea (4).

Gli Achei, che vennero in Italia, onoravano Poseidone (5); ma v'era una città nel Peloponneso, che era sacra in particolar modo a questo nume, ed al punto che era stata anticamente chiamata Poseidonia. Questa città era per l'appunto Trezene (6).

---

(1) Che il dialetto degli Achei fosse propriamente dorico, come vogliono alcuni, a me sembra poco probabile, e mi accosto volentieri all'opinione di coloro, che l'attribuiscono a dialetti così detti pseudo-dorici, è che è più conforme a quella degli antichi, i quali li reputavano eolici, v. Strab. VIII. p. 333 C(= Eforo).

(2) Busolt *Griech. Gesch.* I p. 71.

(3) Lo prova la menzione, che Erodoto fa di un Poseidonate verso (il 544) a C.. (I 167) ed è noto che anche verso questo tempo gli archeologi fissano la data dell' erezione del tempio di Poseidone a Pesto.

(4) Non so se sia stato osservato che il FΙΣΜ degli stateri di Poseidonia del secolo VI non solo ricorda il fiume Ἶς, che scorreva presso questa città v. Herodian. ed Leutz περὶ μον. λεξ. A p. 925 19; cfr. περὶ καθ. προσ. p. 402. 15; 523 6; cfr. Lycophr, v. 724, ma anche Ἶς di Elice, che sarebbe stato il fondatore di Sibari, (v. Strab. VI. p. 261 C.) posto che ivi il testo sia, come è pur possibile, corretto. Nè sarebbe questo l'unico caso di una così perfetta omonomia tra il nome di un oichista e quello di una colonia: basti ricordare quel Daskon oichista dalla siracusana Camarina, che è pur nome del noto castellano siracusano.

(5) Per lasciare altri fatti, mi limito a ricordare come in Elice la madrepatria di Sibari vi fosse il celebre tempio di Poseidone, che è espresso anche nelle monete del V secolo di questa città v. Head *op. cit.* p. 349; Così a Pallene v'era un δῆμος detto ποσίδειον v. Paus. VII. 27 8; sul tempio di Nettuno ad Aegae v. Strab. VIII p. 385 C.

(6) Strab VIII. p. 373. C. Τροιζὴν δὲ ἱερά ἐστι Ποσειδῶνος ἀφ' οὗ καὶ Ποσειδωνία ποτὲ ἐλέγετο; cfr. Paus. II. 30. 8. Circa le monete v. Head *op. cit.* p. 371.

Non è naturale supporre che i Trezeni, cacciati da Sibari, abbiano fondata un' altra città, alla quale abbiano dato il nome della loro madrepatria, e che questa sia la Poseidonia sulle coste dell' Enotria? Fortunatamente, un complesso di circostanze d'indole numismatica ci conferma in questa ipotesi.

Nel sesto secolo Poseidonia nell' Enotria battè quei bellissimi stateri incusi, che hanno impresso il dio Poseidone e la leggenda in caratteri achei: ΓΟΜ. A prima vista si sarebbe tentati credere che Poseidonia partecipasse alla lega federale monetaria achea, della quale facevano parte Sibari, Crotone, Metaponto, Caulonia, Laos, ed alla quale si unì anche Taranto, come dimostrano il tipo ed il peso delle sue antichissime monete (1). Ma è stato invece osservato come Poseidonia al pari di Reggio, pur battendo monete, che si somigliano nell' aspetto esterno e pei tipi dell'arte a quella della lega achea (2), nondimeno segue un diverso sistema ponderario. L'antichissima moneta incusa di Reggio segue il sistema eginetico delle altre sorelle calcidiche di Cuma nella Campania, di Zancle, di Nasso e di Imera nella Sicilia (3).

Un fatto analogo presentano le monete di Poseidonia, dacchè, nel periodo più antico, gli stateri pesano gr. 7, 646, mentre gli stateri di Sibari e delle città, che formavano la lega achea al tempo di Pitagora, hanno il peso normale di gr. 8, 164. Poseidonia non segue la divisione degli stateri delle città achee. È adunque chiaro che gli interessi commerciali di Poseidonia nel VI secolo non erano precisamente quelli di Sibari, e che essa aveva interessi ed alleanze con altre città, e forse con le stesse rivali di costei (1). Se teniamo presente che le dramme di Poseidonia, di questo pe-

(1) Head, *op. cit* p. 44, 61 sgg.

(2) Dal punto di vista dell' arte non è possibile non confrontare il Poseidone delle monete della città omonima v. ad es. Head *op. cit.* p. 67, fig. 43, con la divinità espressa in quelle di Caulonia, v. ib. p. 78 fig. 52.

(3) Head, *op. cit.* p. 91.

(4) Head, *op. cit.* p. 67. Il peso normale assegnato dall' Head *op. cit.* p. 69, allo statere di Siris e di Pyxus è di gr. 7, 776 cfr. Poole *Catal.: Italy* p. 283 n. 1, ed è quello di Poseidonia di gr. 7, 646. Non potrebbe supporsi che le tre città fossero fra loro alleate? In tal caso l'alleanza di Poseidonia con le città, che erano le rivali di Sibari, di Crotone e di Metaponto, darebbe a queste relazioni un carattere addirittura ostile verso la metropoli. Quegli stateri sono stati coniati prima dell' assalto

riodo, pesano gr. 3, 823, e che quelle, che secondo tutte le probabilità appartengono a Velia pesano da gr. 3, 758 a 3, 888 (1), comprenderemo meglio come mai fosse un Poseidoniate quegli, che, stando ad Erodoto (1, 167), indicò ai Focesi il luogo, in cui fondare Velia.

Nel secolo seguente però Poseidonia abbandona questo sistema monetario, e mentre Velia si accosta al sistema attico, essa accetta interamente l'acheo. Sibari era stata distrutta; più che probabilmente, i Sibariti, che scamparono al disastro, non ripararono solo a Lao ed a Scidro, sulla spiaggia del Tirreno (v. Herod. VI. 21) ma anche a Poseidonia. Tanto è vero che le monete della seconda Sibari hanno impresso Poseidone, e talvolta la doppia leggenda Σύ(βαρις) e Ποσ(ειδώνια) (2). Vi fu a quanto pare una riconciliazione, e forse sorsero attriti con la vicina Velia (3). Checchè si possa pensare su questa ultima circostanza, certo sarebbe un grave errore supporre che fra le città achee e le ioniche della Magna Grecia vi fossero sempre inimicizie. Alla fine di questo secolo la ionico-calcidica Reggio, e non più tardi del 415, aderiva alla seconda lega achea (4) e al tempo del primo Dionisio, nel 387 a. C., Velia, benchè ionica-focese, inviava una flotta in difesa dell'achea Caulonia, colonia di Crotone (5).

di Siris. Le città achee avevano appunto assalita Sirio in causa della concorrenza vantaggiosa, che mediante la valle omonima ed il trasporto delle merci sulle rive del tirreno faceva al loro commercio. Ammettere che dopo tale vittoria Sibari tollerasse una lega monetaria di Siris con Pyxus è, parmi, un assurdo.

(1) Head, *op. cit.* p. 73 sg.

(2) Head, *op. cit.* p. 70.

(3) Strabone VI p. 256 C dice espressamente che i Veliati vittoriosamente πρὸς Λευκανοὺς ἀντέσχον καὶ πρὸς Ποσειδωνιάτας. Ma egli, benchè nella pagina anteriore dica che Poseidonia si diceva ormai Pesto, nondimeno ed ivi e nella seguente si serve della espressione Poseidonia per indicare la Pesto del suo tempo. È adunque probabile che egli qui voglia indicare Pesto, che, come egli stesso ci fa sapere poco dopo, VI p. 254 C., cadde in potere dei Lucani. D'altra parte può pur darsi che Strabone alluda ai veri Poseidoniati. Nulla di strano che fra le due città vicine marittime siano di quando in quando sorte rivalità. Nondimeno se Strabone avesse voluto indicare costoro, non avrebbe dovuto nominare i Lucani prima ed i Poseidoniati in seguito; Strabone è storico ed ha il senso della cronologia, alla quale si attiene in tutti i frequenti ricordi, che fa delle vicende storiche delle città, che menziona. Sicchè a me par quasi certo che Strabone ci avrebbe nominati prima i Poseidonati, se di essi qui avesse proprio voluto parlare.

(4) Thuc VI. 44.

(5) v. Polyaen. VI, 11. Se non m'inganno, questo passo è sfuggito ai critici, che hanno trattato della storia della Magna Grecia.

Ma qualunque sia stato il contegno di Velia verso Poseidonia dopo il secolo VI, a noi basti l'aver mostrato come queste città erano amiche in quell' età. Or bene è cosa notissima che i Focesi, che fondarono Velia, (verso il 540) erano della stessa stirpe di quelli, che sessant'anni prima avevano fondato Marsiglia sulle coste della regione occupata dai Liguri. Erodoto (I. 164 sqq.) racconta come una parte de' Focesi, che furono obbligati a lasciare Alalia, passarono a Reggio, e che di lì andarono a Velia; uno scrittore siciliano di poco a lui posteriore, ossia Antioco di Siracusa, asseriva, invece, che i Focesi, che fuggivano dalla patria, se ne andarono in Corsica ed a Marsiglia, e che di là cacciati si recarono ad Elea ossia a Velia (apud Strab. VI. p. 252 C. (1)).

È cosa affatto estranea al nostro compito esaminare questi e gli altri passi, che si riferiscono alla fondazione di Marsiglia e di Velia. Basti a noi il notare che tanto Velia quanto Marsiglia erano colonie Focesi, e che fra le due città, come dimostrano all'evidenza le monete (2), durarono eccellenti quei rapporti commerciali, che avevano le loro radici e nella comunanza di origine e nella posizione di Velia, utile punto di scalo pei Massalioti, che ancora nel IV secolo oltrepassavano lo stretto di Messina, approdavano a Siracusa, e che con navi cariche di grano siciliano approdavano ad Atene (3).

Ma mentre a Velia, e dalla natura del suolo che la circondava, e dalle rivalità commerciali dei Cumani e delle altre città calcidiche era vietato conseguire un grande sviluppo non solo politico, ma anche commerciale (4), Marsiglia si innalzava al grado di potenza di primo ordine. Le sue navi percorrevano sin dal VI secolo tutte le coste del Tirreno, e forse essa assumeva una specie di patronato sopra Velia, che veniva considerata come sua colonia, sia perchè almeno in parte lo fosse, sia perchè appunto Marsiglia eser-

(1) Rimando per questa questione al Meltzer, *Gesch. der Karthager* I. p. 485.

(2) Head, *op. cit.* p, LVI, 7, 74.

(3) v. Dem. *adv. Zenoth.* p 883. 4. 5.

(4) Su questa rivalità di Velia e di Cuma nel commercio della Campania, v. Head *op. cit.* p. 31. Nondimeno, accanto a quelle di Focea, si trovano monete di Velia anche nell'Etruria, v. Mueller-Deecke *Die Etrusker* I. p. 382; circa la piccolezza del territorio di Velia e lo scarso numero de' suoi abitatori v. Strab. VI. p. 252 C; cfr. Laert Diog. IX. 5. 28.

citava tale patronato (1). E poichè Velia passava per colonia di Marsiglia, e dacchè nel secolo VI i rapporti fra Velia e Poseidonia furono amichevoli ed intimi, non può supporsi che Marsiglia assumesse una specie di patronato anche sulla seconda? Che se così fosse non sarebbe del tutto difficile comprendere come nella fonte comune di Carace e di Eustatio venisse asserito che v' era una Trezene (ossia Poseidonia) colonia di Marsiglia in Italia.

Quale fosse questa fonte e qual valore avesse e come vensse originariamente esposta questa notizia, sarebbe ora e necessario e desiderabile a un tempo investigare; ma pur troppo alla buona volontà, in questo caso, fanno difetto in modo assoluto i materiali.

(1) Pseud Scym. v. 250: καὶ Μασσαλιωτῶν Φωκαέων τ' Ἐλέα πόλις, cfr. Strab. VI. p. 252 C.

V.

SE IL NOME E IL REGNO D'ITALIA

SIANO SORTI, LA PRIMA VOLTA, NEL BRUZZIO MERIDIONALE

Quale sia l'origine del nome "Italia„, se la Magna Grecia sia stata così detta dal nome dei vituli (ἰταλοί), se tale etimologia possa essere documento della esistenza di genti di stirpe italico-osca nell'Italia meridionale, prima dell'arrivo delle colonie elleniche, o se invece questo nome sia derivato da una parola semitica (*itan*), che ricomparirebbe nel nome di Itanos, città e capo di Creta, non è mia intenzione di discutere in questa nota (1). Il tema è vasto e non può essere trattato isolatamente; di esso mi occupo altrove. Qui è mia intenzione esaminare il valore della leggenda dell'impero di Italo, che ci è raccontata da Antioco, lo storico siracusano della seconda metà del secolo V.

Questa leggenda, che ci è conservata da Dionisio di Alicarnasso, da Strabone e da Aristotele, suona così: Il paese detto "Italia„ (ossia la Magna Grecia) in origine si chiamava Enotria " con il tempo poi (dice Dionisio) " viene detto Italia, al tempo di un uomo potente di nome Italo „. Costui (dice Antioco), " poichè era un uomo buono e sapiente, coloro, che abitavano " vicino, in parte indusse ad obbedirgli con le buone, in parte a sè sottomise " con la forza, di modo che fece sua tutta la terra, quanta è entro i golfi " Napetino e Scilletino, e questa per la prima venne chiamata Italia al

(1) V. su ciò Nissen, *Italische Landeskunde* I. p. 60 sgg.; Heisterbergk, *Ueber den Namen Italien* (Freiburg 1881).

" tempo di Italo. E dopo che di questa divenuto signore molti uomini ebbe " soggetti, assalì tosto i popoli vicini e sottopose molte città; ed egli era " di stirpe enotria „ (1).

Quale fosse questa regione ἐντὸς τῶν κόλπων τοῦ τε Ναπητίνου καὶ τοῦ Σκυλλητίνου è meglio spiegato dal frammento dello stesso Antioco, conservato da Strabone, nel quale si dice chiaramente che in origine l'Italia era il Bruzzio, ossia il paese, che incominciava dallo stretto di Messina, e che terminava al golfo Ipponiate (detto Napetino da Antioco) ed allo Scilletino, ed ove si aggiunge che col tempo questo nome di Italia si estese sino a comprendere il fiume Lao sul Tirreno, Metaponto e la Siritide sull'Jonio (2). Secondo Dionisio di Alicarnasso invece Antioco avrebbe detto che il nome d' Italia al tempo di Morgete', il successore di Italo, indicava il paese da Taranto sino a Poseidonia (3). Infine diceva Antioco (ecco le sue parole serbate da Dionisio) " dopochè Italo invecchiò regnò Morgete. Ed al tempo di costui un " uomo giunse da Roma fuggiasco; si chiamava Siculo „. (4). Ed in un altro frammento " Così divennero Siculi e Morgeti ed Italieti essendo Enotri „ (5).

Aristotele infine, in un passo, che, come è già stato più volte osservato, deriva da Antioco (per mezzo di Eforo?), dice che le istituzioni cretesi di Minosse eran pure in Italia, ma che qui erano più antiche e di molto (πολλῷ παλαιότερα), che le creò Italo, re degli Enotri, che da costui vennero detti Itali gli indigeni ed Italia il paese posto fra il golfo Scilletino e Lametino. Italo gli Enotri, di pastori che erano, fece agricoltori, dette loro varie leggi e per il primo istituì i pubblici conviti, che duravano ancora al suo tempo al pari delle altre leggi presso i popoli derivati da lui. E quali fossero

(1) Dion. Hal. I. 35; = Ant. fr. 4. in Mueller *F. H. G.* I. p. 182.

(2) Strab VI p. p 254 C. — Ant. fr. 6.

(3) Dion. Hal. I. 73. = Ant. fr. 7. a me pare assai probabile che Strabone, o la sua fonte, abbiano malamente riferito il testo di Antioco, e che abbia asserito il vero Dionisio di Alicarnasso. Lao era infatti (v. Strab. VI. p. 254 C sq.) il confine del Bruzzio e della Lucania, non già dell'Italia, che certo ai bei tempi degli Italioti si estendeva sin là, ove erano le loro colonie, e quindi sino a Poseidonia (Pesto).

(4) Dion. Hal. I. 73. = Ant. fr. 7.

(5) Dion. Hal. I. 12. = Ant. fr. 3.

questi popoli Aristotele indica esplicitamente, ossia: verso il Tirreno gli Opici anticamente ed ancora al suo tempo cognominati Ausoni, verso il mare Jonio e la Japigia i Côni, abitatori della Siritide di stirpe enotrica (1).

Re Italo, uomo buono e sapiente, creatore di buone leggi e costumanze, che i pastori trasforma in agricoltori, autore di un grande impero formato in parte con le arti della persuasione e in parte con la guerra, e che al tempo del suo successore era costituito da tutto il paese, che più tardi si chiamò Magna Grecia, non è certo un personaggio storico, bensì mitico non meno di Minosse, con il quale Aristotele lo confronta. Se però Aristotele lodava le leggi delle stirpi enotriche e ne riconosceva l'antichità, ciò vuol dire che v'è un fondo di vero nel racconto di Antioco, e che tali popolazioni erano ben lungi dal trovarsi allo stato di barbarie, allorchè gli Achei, verso la fine dell' VIII secolo, fondarono le loro colonie sulle coste d' Italia.

Se, come dallo stesso Aristotele può ricavarsi, e come sulla base di altre notizie pensano alcuni moderni, questi popoli erano gli Opici: ossia uno strato più antico della stessa stirpe, alla quale appartennero i Sabelli, questi elogî non dovrebbero punto sorprenderci; essi ci dovrebbero anzi apparire meritati. Nè ci sorprendono perchè tributati ai Côni della Siritide, ossia ad una stirpe venuta dall' Epiro, paese, che in una età assai antica era abitato da genti, le quali non erano molto più rozze di quelle, che occupavano le altre contrade della Grecia.

Nulladimeno la leggenda di Antioco è assai inverosimile, anzi è addirittura falsa, là ove dice che il nome e l' impero di Italia sorse la prima volta nel Bruzzio. L'ordine cronologico dei regni di Italo, di Morgete e di Siculo non risponde a quello delle invasioni etniche, che si succedettero nell' Enotria. Lasciando da parte che nel primo canto dell' Odissea le coste dell' Italia meridionale si chiamano forse Sicania (2), notiamo come i Siculi

(1) v. ARIST. *Polit.* VII. 9. 2. sqq.

(2) *Od.* I. 307 sqq La Sicania qui nominata parrebbe vicina ad Alibante, che forse era Metaponto (v. STEPH. BYZ ad v. 'Αλόβας); lascio da parte i Σικελοί ricordati nei canti XX v.383: XXIV v. 211, 366, 389, che possono tanto essere i Siculi della Sicilia quanto gli abitanti delle coste d' Italia.

stanziavano nel Bruzzio quando vi giunsero i Locresi (¹). Se essi fossero ivi stati preceduti dagli Itali, di costoro si troverebbe traccia nella Sicilia. Il che non è. Siccome invece i Siculi abitavano il Bruzzio ancora al tempo di Tucidide, il quale faceva Italo re dei Siculi, così potrebbe pur sostenersi che i Siculi fossero i più antichi abitatori del Bruzzio, e che gli Itali, seppure sin dal secolo VIII v' erano popoli di questo nome di stirpe osca, sieno ivi giunti più tardi. Ma può ben darsi che Siculi ed Itali non fossero altro che due nomi particolari di due genti della stessa stirpe, che contemporaneamente abitavano e l'Italia Meridionale e la Sicilia orientale. Tucidide a quanto pare era di questa opinione, che prima di lui aveva di già espressa Ellanico (²).

D' altra parte non v' è chi non veda come nell' aspro e selvaggio altipiano della Sila meridionale e nelle anguste pianure, che lo fiancheggiano, come pure nell'altipiano della Sila settentrionale (³), non potè mai sorgere una vera e propria civiltà, e come, seppure essa qui sorse, non potè essere rapidamente propagata alle terre vicine. La leggenda è, per questa parte, addirittura in opposizione alla configurazione geografica di quella bella contrada, la quale, pur troppo, dalla natura è stata destinata, per tanti secoli ed in tante circostanze, ad essere o l' ultimo rifugio dei vinti o il nido di briganti. Per lim tarci ai tempi antichi, è sulle Sile che si formò quel

(¹) Polib. XII 5. 10; Polyaen XII. 6.

(²) Thuc. VI. 2. 4. Questa asserzione basterebbe a provare come Tucidide, seppure ha seguito, come è probabile, Antioco, non ne ha accettate tutte le asserzioni. Qui infatti egli pare si accosti ad Ellanico v. Hellan apd. Dion. Hal. I. 22 = M: *F. H. G.* I. p. 52 fr. n. 53.

(³) Parlo espressamente delle due Sile. Strabone, ove parla di Reggio, ricorda il δρυμὸς .... ὃν Σίλα καλοῦσιν, εὔδενδρός τε καὶ εὔυδρος, μῆκος ἑπτακοσίων σταδίων VI. p. 261 C; cfr. Plin. *N. H.* III. 5. 74. É dunque evidente che egli estende questo nome soltanto alla montagna di Aspromonte, e difatti il nome Sila è scritto solo su questo tratto di paese nell'ultimo atlante del Kiepert. Eppure i moderni chiamano Sila l'Apennino della Calabria, che sta sopra Crotone ed a nord di Catanzaro. M'è quindi nato il sospetto che, non ostante il passo di Strabone, nell'antichità questo nome fosse esteso a tutta la catena dell'Appennino, che da Turio va sino a Reggio, ed il mio sospetto divenne quasi certezza lo scorso anno, allorchè, mentre faceva un viaggio a scopo scientifico nella Magna Grecia, rimasi gradevolmente colpito nell' udire i contadini di Catanzaro chiamare *le Sile* le due sezioni dell'Appennino, di cui parliamo, e che, nella regione, in cui si trova Catanzaro, si abbassano improvvisamente presentando quasi la figura di due catene distinte.

feroce popolo dei Brezzi, terribile ai Greci ed ai Lucani, è su di esse che si appoggiò negli ultimi anni Annibale, è in esse che anche Spartaco cercò salvezza. A me non sembra, del resto, necessario diffondermi su questa dimostrazione. Una buona carta geografica giustifica il mio asserto, e la storia della Calabria sta lì per mostrare come, pur troppo, vi sia una legge necessaria di rispondenza tra la conformazione del paese e lo svolgimento locale della civiltà umana.

Se pertanto, fra le antichissime stirpi enotriche vi fu una civiltà degna di essere lodata dagli scrittori greci, questa non sorse nel Bruzzio, nè, nel propagarsi, tenne il cammino da sud verso nord-est, bensì dal nord e dall'est giunse verso sud nel Bruzzio. Non gli abitanti dell' aspra Sila meridionale, ma gli Opici ed i Côni, nella loro espansione, portarono con sè le loro buone usanze, le savie leggi.

È pertanto naturale il sospetto che una simile leggenda sia stata escogitata e sia stata per la prima volta espressa da uno scrittore, il quale fosse o nativo od amico di una città italiota, posta ai piedi dell' Aspromonte.

Delle città italiote, ivi situate, alcune dipendevano da Crotone, come Caulonia, altre erano colonie dei Locri Epizefirii; infine sullo Stretto v'era Reggio, la città calcidica. Tale leggenda non potè però sorgere a Caulonia, ossia in una città di quegli Achei, che le loro sedi non avevano posto sulle coste del Bruzzio, bensì su tutta la spiaggia, che da Caulonia va a Taranto. Potrebbe pensarsi a Reggio, che dette alla luce il più antico prosatore, il più antico logografo di Occidente, Hippys, il contemporaneo di Erodoto, l' autore della prima storia delle colonie elleniche d'Italia e di Sicilia. Ma, anche in questo caso chi tenga presente come la storiografia, nelle sue origini, fosse tutt' altro che libera da preoccupazioni locali, come anzi non fosse altro che la glorificazione delle gesta regionali, non troverà strano che Antioco Siracusano potesse farsi interprete di una tradizione, la quale era favorevole ad una città ionica, che della sua patria era atroce nemica.

Reggio era l' emula di Siracusa, da almeno 60 anni, quando Antioco attendeva a compiere il suo scritto; da quel tempo Locri era invece la fedele alleata di Siracusa, e grazie a questa alleanza i Locresi erano saliti al grado di uno stato potente (v. s. p. 30 sg.). I Locresi avevano fra le loro vecchie

tradizioni quella d'essere il più antico popolo sia fra gli Elleni d'Oriente, che d'Occidente, il quale fosse governato da leggi scritte, che ispirate da Minerva avrebbe loro composto un pastore, Zaleuco (1). La personalità di Zaleuco era però così poco certa che Timeo credeva di potere negar fede alla sua esistenza (2), ed altri storici di primo ordine, come Eforo, avevano già asserito che la legislazione di Zaleuco era stata modellata su costituzioni anteriori (3). È chiaro: questa legislazione di Zaleuco era una gloria locale, che non tutti ammettevano, o almeno che tutti non riconoscevano essere di tanta e sì grande antichità ed originalità.

Or bene, se terremo conto che la sapienza del pastore Zaleuco ricorda un po' troppo quella dell'enotrio Italo, che i pastori rende agricoltori, e che i Locresi confessavano ancora al tempo di Polibio, che i fondatori delle loro città avevano tolte molte costumanze dai Siculi, i primi abitatori del loro paese (4), troveremo assai probabile che la tradizione di Italo (ossia che in origine costui fosse re del Bruzzio meridionale, e che a questo paese fosse toccato per il primo il nome di Italia, il quale da qui si sarebbe poi esteso a tutta la Magna Grecia) sia di origine non reggina ma locrese. E appunto perchè locrese, secondo che a noi pare, essa fu accolta e divulgata da uno scrittore siracusano.

I motivi, che dettero infatti origine ad una tale leggenda, non sono da cercarsi semplicemente nella vanità locale, che ovunque ed in tutti i tempi è stata ed è sorgente di falsa storiografia, bensì nelle condizioni politiche di Locri. Le città più notevoli della Magna Grecia e pel numero di colonie e per ampiezza di territorio erano, senza dubbio, le città achee di Crotone, di Sibari, e di Metaponto. Non ostante le rivalità interne, esse erano unite da una lega, che ci è rivelata anche dalle loro monete d'argento incuse, e tutte e tre aveano assalita sino dalla metà del secolo VI, la ionica Siris, che congiunta a Pyxus faceva loro una seria concorrenza commerciale; e dopo la presa di Siris, Crotone avea assalita Locri, che a Siris aveva prestato aiuto (v. s. p. 6.).

---

(1) Pseud. Scymn v. 315; Arist. *d. rep. Locr.* fr. 171 ed. Heitz.

(2) Tim. apd Cic. *d. legg.* II. 6. *ad Att.* VI. 1.

(3) Eph. apd. Strab. VI. p. 260 C.

(4) Polib. XII. 5. 10.

La vittoria della Sagra aveva salvato Locri dall' esterminio, e aveva per un poco abbassato l'orgoglio dei Crotoniati, ma l'arrivo in questa città di Pitagora v' aveva ritemprato l' animo dei cittadini. Le rivalità fra Sibari e Crotone terminavano con la distruzione della prima (510 a C.). Alla vittoria seguivano, è vero, le rivoluzioni interne e le varie persecuzioni contro il partito aristocratico dei pitagorici, nondimeno la potenza materiale delle città non veniva da ciò scemata. Crotone era ormai la prima città d' Italia e verso la metà del secolo V, terminate per un poco le interne sedizioni, si ricostituiva la lega italiota, la quale, però, ben lungi dall' essere la federazione di tutte le città elleniche d' Italia, era formata dalle sole città achee autonome di Crotone, di Caulonia e della seconda Sibari (1).

Eppure Siracusa era diventata di già potenza di primo ordine, e sino dal tempo de' Dinomenidi aveva minacciato la stessa città di Crotone, e (dopo il 480 a. C.) faceva una pericolosa concorrenza al commercio delle città italiote. Solo una lega di tutte queste città poteva porre argine allo invadere della grande città dorica, ma una simile concordia non era da attendersi da tante città e di origine diversa e divise da rivalità. Le sole città achee autonome formarono adunque la federazione, ed allo stesso modo forse, che esse avevano di già dato origine alla pomposa e superba denominazione di Magna Grecia, il vasto loro territorio contrapponendo alla stretta lingua di terra delle città achee del Peloponneso (2), esse non permisero che alla loro lega partecipassero Reggio, Taranto e Locri. Ma alla loro oltracotanza i Tarantini ponevano un freno e con le armi e con l' allenza con Reggio, e terminavano con il tempo ad imporsi alle città achee ed a strappare loro la presidenza di quella lega, la quale tenne poi le sue adunanze nel territorio acheo, conquistato da Taranto, non in Taranto stesso (3). Solo gli avvenimenti posteriori, ossia il timore di Siracusa, fecero sì che più tardi anche Reggio prendesse parte alla lega italica (4).

(1) Polyb. II. 39.

(2) Intorno all' origine del nome Magna Grecia accetto l'ipotesi di Ed. Meyer, *Philologus* N. F. II. p. 274 nota.

(3) v. Strab. VI. 289 C extr; cf. 264 C.

(4) Non più tardi del 415 a. C. v. Thuc. VI. 44.

Locri infine, stretta fra le due rivali e nemiche città di Reggio e di Caulonia colonia di Crotone, nemica de' Calcidesi e degli Achei allo istesso tempo, non vedeva altra salvezza che nella dorica Siracusa, nel diventare la fedele alleata di lei e nell' inaugurare, in certo modo, una politica anti-italiota.

Tali condizioni politiche, tali preoccupazioni da parte dei Locresi, che si vedevano quindi esposti all'ira ed al disprezzo delle altre città italiote, hanno dato origine, se non ci inganniamo, alla leggenda del re Italo ed alla tradizione, che il nome Italia sia sorto primieramente nel Bruzzio meridionale, non già nel paese, in cui abitavano i superbi Achei. Gli stessi motivi ci spiegherebbero come di questa tradizione si fosse fatto campione uno scrittore della città alleata di Siracusa.

Per noi moderni, che viviamo in un ordine di idee morali e religiose così diverse da quelle degli antichi Elleni, riesce difficile comprendere l' importanza, che coloro dovevano annettere a rivendicazioni di simili tradizioni storiche. Ma a chi con il pensiero vive nel passato, queste si presentano come affatto naturali. Fare accettare certe pretese genealogie, riuscire a far credere che certi eroi, onorati dalla città, avessero fatti viaggi in certe lontane regioni, equivaleva ad una vittoria diplomatica od al far riconoscere la bandiera nazionale, che un esploratore moderno fissa per il primo in un paese non ancora soggetto ad una potenza civile.

Ogni popolo ellenico, non meno che i Romani, ha avuto di queste pseudo-tradizioni e pseudo-documenti. La pretesa discendenza dei re spartani dalla stirpe degli Eraclidi, non meno che l' interpolazione ateniese nel catalogo delle navi sono sorte, come è noto, per effetto di cause analoghe (1).

(1) Potrebbe anche supporsi che sia di origine locrese la tradizione posteriore, che di Zaleuco fa uno scolare di Pitagora. Dicearco (apud Porph. *de vit. Pyth*, p. 88 M *F. H. G.* II. p. 245 n. 31) diceva che i Locresi respinsero Pitagora allorchè questi cercò presso di essi rifugio, perchè non vollero che si mutassero le loro leggi, e come a me sembra, questa è una notizia autentica. La tradizione, che di Zaleuco fa uno scolare di Pitagora, è certo meno antica, forse deriva da Eforo (v. Diod. XII. 201) ed è certo sorta quando, sedati i tumulti contro i pitagorici, avere ospitato il grande riformatore e filosofo, aver avuti cittadini scolari di lui sembrava il più grande onore e nell'Italia e fra gli altri Elleni. Una simile tradizione potè del resto sorgere anche fuori di Locri per opera di eruditi.

In quanto ad Antioco non sapremmo fargli rimprovero di aver fatto servire la sua storia a preoccupazioni locali, dacchè questa è, come dicemmo, la caratteristica di tutta l'antica storiografia ellenica, ed è noto come lo stesso Erodoto, anche volendo escludere del tutto l'accusa di malafede, che gli fecero varî antichi scrittori, ad es. Plutarco, non abbia saputo liberarsi da tendenze di questo genere. Se, come è probabile, è da Antioco, che deriva la notizia di Strabone, che i Locresi vennero aiutati dai Siracusani nei primi anni della fondazione della loro città (v. VI. 259 C.) noi avremmo forse un altro esempio del carattere tendenzioso della sua storia; e che fosse tendenziosa di fatto lo prova la circostanza che egli escludeva Taranto dall'Italia, cui Erodoto, di lui più vecchio di qualche decennio, aveva già attribuito a questo paese (ad es. I. 24). Antioco scriveva non solo qualche decennio dopo Erodoto, ma un decennio almeno dopo che Taranto aveva fatto riconoscere dai Turini il possesso legittimo della Siritide, e dopo che era stata fondata Eraclea, ove i Tarantini tennero poi il concilio della lega italiota (1). È evidente che Antioco era poco favorevole a Taranto negandole, nè più nè meno di quello che già avevano fatto le città achee, il carattere di città italiota. Gli è che Taranto era, in fondo, ostile alla grandezza di Siracusa, e per questa ragione, sino dal 473 almeno, essa aveva stretta alleanza con Reggio pure rivale di quella (2).

Io non reputo necessario spendere altre parole per dimostrare il carat-

(1) Erodoto, come è noto, deve esser morto verso il 428; Antioco narrava le vicende politiche sino alla pace di Gela a 424 a C. (v. Diod. XII. 71); la Siritide cadeva in potere dei Tarentini, che vi fondarono Eraclea nel 433 (v. Diod. XII. 36).

(2) v. s. p. 3 sqq. È per una tendenza analoga che anche Tucidide, VII. 33. fa incominciare l'Italia da Metaponto. Taranto al tempo della 2.ª spedizione Ateniese in Sicilia era naturalmente nemica di Atene. I Metapontini invece respirarono per un momento, e fecero alleanza con costei (ib. 57). Mi si potrebbe obiettare che verso il 415 a. C. Taranto era sì ostile ad Atene, ma non nemica a Siracusa, ricavandolo dalle parole di Ermocrate ὑποδέχεται γὰρ ἡμᾶς Τάρας Thuc. VII. 34. 4. Ma sarebbe obiezione non valida. Ermocrate voleva dire che si sarebbe potuto indurre Taranto all' alleanza, perchè anche essa era minacciata, ma questa non venne allora stipulata. Taranto non favorì gli Ateniesi, è vero, (Thuc. VI. 44.) ma non inviò una sola nave ed un sol uomo in aiuto di Siracusa (cf. Thuc. VII. 33.). Essa teneva questo contegno, perchè le era tanto ingrato il trionfo di Atene, quanto la potenza dell' altra.

tere tendenzioso dell'opera di Antioco; se nondimeno taluno trovasse ancora poco probabile che nel secolo V potesse o sorgere o prendere incremento la leggenda, che riferiva al Bruzzio meridionale l'onore di aver dato origine al nome d' Italia, e che Antioco dei fatti, delle condizioni del tempo suo si valesse per comporre la storia del passato, costui diverrà meno dubbioso ad accogliere le nostre opinioni, quando rifletta che Antioco asseriva che Siculo, il terzo successore di Italo, era un profugo, che giungeva da Roma.

Roma di certo non esisteva in un tempo di tanto anteriore alla venuta delle colonie greche in Italia, e se anche fosse esistita, nessuno avrebbe avuto modo di saperlo (1). Come mai Antioco parlava di lei? Ciò si può soltanto spiegare con le relazioni, che sin dal principio del secolo V congiungevano Roma con la Sicilia, sopratutto con Siracusa (2). È evidente che il nostro Antioco si valeva di fatti recenti per comporre la sua storia antica, la quale non era dunque degnissima di fede e certissima (ἐκ τῶν ἀρχαίων λόγων τὰ πιστότατα καὶ σαφέστατα fr. 3), come egli stesso asseriva e come taluni moderni tendono a credergli, ma che, dopo tutto, era accanto a quella di Hippys il più antico, il più prezioso documento della storia ed in pari tempo della pseudo-storia de' Greci di Occidente.

(1) Appunto perciò Dionisio d'Alicarnasso (I. 73) osservava che, stando ad Antioco, sarebbe stato necessario supporre una Roma ancora più antica di quella, di cui parlavano le altre tradizioni, anteriore quindi alla venuta nel Lazio di Enea e de' Troiani.

(2) Sino dal 491 a. C. i Romani avrebbero fatto incetta di grani in Sicilia (v. Liv. II. 34. 3. sq. Dion. Hal. VII. 1) e ne avrebbero avuto in dono da Gelone di Siracusa (v. Dion. Hal. VIII. 70). Su queste e sulle altre relazioni di Siracusa con Roma discorro ampiamente altrove.

VI.

TAUROMENIO COLONIA DEGLI ZANCLEI DI IBLA.

Nella descrizione della costa orientale della Sicilia, dopo di aver ricordato Zancle (Messana), secondo lui colonia dei Nassî, Strabone dice: καὶ Κατάνη δ' ἐστὶ Ναξίων τῶν αὐτῶν κτίσμα, Ταυρομένιον δὲ τῶν ἐν Ὕβλῃ Ζαγκλαίων (v. VI. 268 C.). Strabone intende parlare di Tauromenio posta sul monte, che domina Nasso; tale notizia non può quindi destare che molta meraviglia. Noi sappiamo infatti che il monte Tauro era occupato dai Siculi, allorchè Teocle fondò Nasso (v. Diod. XIV. 88. 1.), ed anche ammesso che Nasso sia stata sin da principio fabbricata proprio sul piano, dove scorreva l'Assinos ed ove si trovava nel secolo V (v. Thuc. IV. 25. 8), è evidente che la città non potè sussistere senza il possesso da parte dei Calcidesi della rocca di Tauro, che le soprastava. Nè senza il possesso di questa si comprenderebbe come Teocle, cinque anni dopo la fondazione di Nasso, potesse muovere alla fondazione di Catane e di Leontini (v. Thuc. VI. 3. 3.). Merita quindi piena fede la notizia di Diodoro (o diremo meglio di Timeo) secondo il quale i Greci, allorchè fondarono Nasso, si impadronirono pure del colle Tauro.

Non è necessario dimostrare che accanto alla calcidica Nasso, non poteva esistere la città pure calcidica di Tauromenio, fondata dagli Zanclei di Ibla, perchè Tauromenio, ossia Taormina, ha il naturale sbocco verso il mare, ove è la rada di Nasso, la quale, finchè fu fiorente, non tollerò che sul capo le stesse un comune indipendente. In una parola il colle Tauro non fu una città, ma solo la fortezza de' Nassî. La città di Tauromenio ebbe solo origine al tempo di Dionisio I allorchè, verso il 405 a C, il ter-

ribile tiranno, distrutta Nasso, la città rivale di Siracusa, le sostituì sul monte la colonia militare che chiamò Tauromenio (Diod. XIV. 15. 2; cf. 88. 1; XVI. 7. 1.).

Ciò stabilito è chiaro che Strabone dice cosa, che non può essere ciecamente accettata, e potrebbe anche discutersi se la sua notizia non sia da respingere del tutto, qualora non avessimo a fare con un autore molto assennato, che trae il suo materiale, in generale, da fonti eccellenti e che le notizie, che si riferiscono alle colonie siceliote, toglie o direttamente o indirettamente da Eforo; tanto è dire da una delle massime autorità in fatto di storia delle colonie elleniche (v. Polyb. IX. 1. 4; XXXIV. 1. 3.). A ciò si aggiunge che anche il Pseudo Scimno, che segue la stessa fonte, là ove riferisce il nome delle colonie calcidiche della Sicilia ricorda Nasso, Leontini, Zancle, Càtane, Callipoli, Eubea, Mile εἶθ' Ἵμερα καὶ Ταυρομένιον λεγομένη v. 289 (1). È dunque chiaro che Strabone ha errato, ma che la sua notizia non è da rifiutare del tutto, dacchè v' era realmente una Tauromenio, la quale passava per essere una colonia calcidica.

Ora dacchè questa calcidica Tauromenio non poteva essere la fortezza di Nasso, nasce naturale il sospetto che il Pseudo Scimno parli d'un'altra Tauromenio, cui Strabone avrebbe confusa con la Tauromenio più nota. Realmente sulla stessa sponda orientale della Sicilia, a settentrione di Siracusa e di Megara, sorgeva un altro promontorio detto pure Tauro, il quale, verso mezzogiorno, si getta in mare in modo da formare un promontorio a guisa di spada, e che dai Greci fu per ciò detto Xifonio (2); questo Tauro era appunto vicino ad Ibla maggiore ossia a Megara Iblea.

---

(1) Il testo ha ἐχομένη ma dacchè non v' è traccia di alcuna Tauromenio accanto ad Imera accetto la correzione λεγομένη del Meineke tanto più che risponde ad una formula comunissima all' autore, cf. ad es. i luoghi seguenti tutti di seguito; v. 268. Τρινακρίαν καλουμένην; v. 282 Συρακούσας ... λεγομένας; v. 288 Μύλαι ... ἐπικαλούμεναι; v. 294 τὴν Καμάριναν λεγομένην v. 312 οἱ δὲ λεγόμενοι Ἐπιζεφύριοι; v. 331 sq. Τάρας ... λεγομένη; v. 339 sq ὠνομασμένη-Σύβαρις; Credo quindi che si possano lasciare da parte gli scrupoli di C. Müller, il quale partendo dalla supposizione che vi potesse essere un Tauromenion vicino ad Imera, mantiene la forma ἐχομένη v. *G. G. M.* I. p. 208.

(2) Questo colle Ταῦρος è indicato da Tolomeo, III. 4. 9, fra Siracusa e il fiume Alabo. Da Diodoro poi, XIV. 58. 2, si ricava che era 160 stadi lungi da Siracusa. Questa distanza, accettando come misura lo stadio minore di m. 150, usato dagli antichi per le distanze di Siracusa, v. Holm-Lupus, *Die*

È qui che dovremo collocare la Tauromenio degli Zanclei di Ibla, di cui parlava Eforo? Questa ipotesi parrà degna di esser presa in considerazione, quando si abbiano presenti i fatti, che ci son raccontati intorno alla fondazione di Megara Iblea.

I Megaresi, secondo Tucidide, condotti da Lamis fondarono una colonia a Trotilo, un poco a nord-est di Leontini, sulle sponde del fiume Pantacia. Ottennero poi per poco di far parte della cittadinanza dei Leontini stessi; ma cacciati da costoro si fissarono a Tapso (nella penisola dei Magnisi posta fra il promontorio Xifonio e Siracusa) e cacciati anche di lì con l'aiuto del siculo Iblone fondarono Megara Iblea, a metà della sponda, che corre da Xifonia a Tapso (Thuc. VI 4. 1. sqq.). Queste notizie sono confermate ed in parte completate da Polieno. Ai Megaresi, secondo costui, aprono le porte della città i Leontini, i quali con l'aiuto loro (essi non lo potevano, perchè astretti da giuramenti) cacciano i Siculi; ma con uno stratagemma, che non è qui il caso di riferire, i Leontini ricacciano dalla loro città i Megaresi dopo di averli privati delle armi e permettono loro, ma per un solo inverno, di riparare a Trotilo (Polyaen. V. 5. 1. sq.). Forse il testo di Polieno è corrotto, ovvero Polieno stesso ha qui commesso un errore, ed in luogo di Trotilo va letto Tapso [1]. Ma a noi preme constatare che

---

Stadt Syracus (Strassburg 1887) p. 24 n. 1, od anche prendendo a base lo stadio maggiore (ossia 8 stadi un miglio romano) conviene alla regione posta fra il capo Compolato e capo Croce. Che poi a sud-ovest di quest' ultimo la lingua di terra, ove oggi è Augusta, fosse il τῆς Ξιφωνίας ἀκρωτήριον ricordato da Strabone, VI p. 267 C. ed il λιμὴν Ξιφώνειος, che il Pseudo Scilace colloca accanto a Megarà, §. 13, appare evidente più che dal testo del Pseudo Scilace testè citato (che sbaglia collocando il Simeto a mezzogiorno di Leontini) dal testo geografico di Edrisi, che il capo di S Croce chiama Ixsifu. v. ed. Amari-Schiapparelli (Roma 1883), p. 67. Se poi Strabone ricorda il capo Xifonio dopo aver fatta menzione dei porti formati dall'Etna, da ciò non viene che esso fosse alle radici di questo monte al Capo Molini, al sud di Aci Reale, come volle taluno. Strabone, in questo stesso passo, aveva di già ricordato Megara.

[1] Di questa opinione è lo Schubring nella *Zeitschrift für allgemeine Erdkunde* XVII, p. 447 sgg. nè credo si possa pensar diversamente. L'Holm *Gesch. Sicil.* I. p. 390 la trova poco probabile " Dann wird aber erst recht auffallend, egli dice, dass die Leontiner über das Wohnen der Megarer in Thapsos eine Werfügung (συνεχώρησαν) gehabt haben sollten, da doch Thapsos eigentlich ausserhalb ihres Bereiches war. Ein Anderes ist es mit Trotilon, das den Leontinern gehören konnte. Am besten wären die Worte μέχρι γὰρ τοσούτου — Χαλκιδεῖς auf das Wohnen in Leontini bezogen; dann hätte man statt μέχρι ἑνὸς χειμῶνος zu lesen etwa διελθόντος χειμῶνος, und der Sinn wäre: nach Verlauf des Winters — denn so lange hatten die Leontiner sie in ihren Mauern geduldet — mussten sie nach Trotilon abziehen ».

dal momento, che i Siculi aiutarono i Megaresi a fondare Megara Iblea, non furono essi quelli, che li cacciarono da Tapso. Da questa penisola certo li respinsero o i Leontini o i Siracusani, o tutti due questi coloni. Ma che non siano da escludere i Leontini dimostra, credo, quanto segue:

I Megaresi cacciati dai Leontini non si volsero ad est, verso Trotilo, donde li avevano tratti ad inganno i Calcidesi, nè a settentrione, perchè ivi si estendeva il territorio di costoro e dei Calcidesi di Catane. Essi si diressero quindi a sud e cercarono una nuova patria nelle coste tra il capo Xifonio e Siracusa. Ma anzichè impossessarsi del primo tentarono di fondare la nuova patria nella stretta penisola di Tapso. Questa penisola era però poco acconcia all'uopo. Piana senza natural difesa, essa non poteva essere utile che come punto di sbarco e come luogo di riparo per le navi. Inoltre v'era appena lo spazio per una piccola borgata, mancava il terreno per nutrire i coloni, i quali non vi avrebbero potuto costituire una vera città senza il possesso delle pianure e delle coste, che le stanno di fronte. E queste alla lor volta, stante la configurazione geografica del paese, non si potevano custodire se non con varie opere di difesa. I Megaresi, ormai inermi e in mezzo a nemici, non erano certo in grado di far tutto ciò. Se Tapso fu il luogo loro concesso per un inverno dai Leontini, si comprenderebbe come mai costoro accordarono ad essi come dimora una località, che, circondata dal mare e punto atta alla difesa, era poco meno che un carcere. E appunto per ciò ai Leontini venne fatto di cacciarli un' altra volta (1).

Ma perchè i Megaresi, anzichè rivolgersi a Tapso, non occuparono la penisola Xifonia? Essa aveva tutti e maggiori ancora che Tapso i vantaggi

---

Ammesso che, come cerchiamo di provare, i Calcidesi possedessero Tauromenio presso Xifonio, cade la prima osservazione Che si possa mantenere Τρώτιλον in Polieno, e che ivi siano ritornati i Megaresi apparisce la cosa meno probabile di questo mondo. I Leontini non volevano vicini altri coloni. Trotilo era tale e forse non potendo trarneli con la forza li avevano levati di là con l'astuzia, aprendo loro le porte a Leontini stessa. Insostenibile è poi la tesi, che Teocle ed i Calcidesi decidessero di tenersi in casa per qualche tempo ancora i Megaresi dopo di averli offesi, mentre ardeva la guerra contro i vicini Siculi.

(1) Ciò apparirà ancor più probabile quando si consideri che i Megaresi non avevano navi; essi erano forse giunti su quelle de' Calcidesi (v. Eph. apd Strab VI. p. 267 C); e certo non ne possedevano allorchè i Leontini li cacciarono dalla loro città.

di una buona posizione marittima; assai più di Tapso essa era infatti difesa dai venti, e mentre Tapso non si prestava a nessuna difesa, un castello sul monte Tauro bastava a conservare la nuova colonia.

A me pare evidente che, se i Megaresi non occuparono il capo Xifonio ed il monte Tauro, ciò dipese dalla buona ragione che queste località erano di già in mano di altra gente, ossia dei Calcidesi, i quali, se li ammettiamo signori di Xifonia, poterono assai facilmente e sorvegliare i Megaresi a Tapso e più facilmente ancora cacciarveli.

Allorquando i Calcidesi, sotto la condotta di Teocle, verso il 734 a. C, fondarono Nasso, conoscevano di già le coste della Sicilia. Assai prima di Nasso, essi avevano fondata Cuma nella Campania, ed i Calcidesi di Cuma non avevano trascurato di insignorirsi del porto di Zancle, ove, solo più tardi, ossia dopo la fondazione di Cuma, sorse una vera e propria colonia (1). Gli Zanclei erano adunque i più antichi coloni e corsari in pari tempo, che avevano occupate le coste della Sicilia; ed è naturale che essi, che vivevano di preda e di bottino, non si limitassero a corseggiare ed a trafficare solo nello Stretto. È naturale pensare che essi possedessero altri approdi ed altre fattorie sulle coste orientali dell' Isola. Una di queste dovette essere la nostra Tauromenio, che sarebbe stata fondata da quelli degli Zanclei, che avevano di già occupata la vicina Ibla. Anche Ibla adunque sarebbe stata una fattoria calcidese, e la conquista di essa da parte dei Megaresi, aiutati dai Siculi, ci si presenterebbe come una vendetta di costoro ormai comuni nemici dei Calcidesi di Leontini (2).

---

(1) Questo risulta nel modo più esplicito dal racconto di Tucidide VI. 4. 5. ove le parole: ὕστερον δέ καὶ ἀπὸ Χαλκίδος καὶ τῆς ἄλλης Εὐβοίας πλῆθος ἐλθὸν ξυγκατενείμαντο τὴν γῆν evidentemente si riferiscono all'arrivo di Teocle ed alla fondazione di Nasso, di Leontini e di Catane cf. ib. VI. 3. 1. sq. Non comprendo come l'Helbig, *Das hom. Epos.* 2.ª ediz. p. 431, ove combatte la notizia che Cuma fosse la più antica colonia di Occidente asserisca: Endlich weiss auch Thukydides ., .. nichts von dem hohem Alter jener Stadt, sondern scheint Naxos auf Sicilien für die erste westliche Niederlassung der Griechen zu halten.

(2) Che Ibla fosse una città, prima ancora di essere fondata dai Megaresi, dice Strabone con le parole τοὺς δὲ Δωριέας τὴν Ὕλβαν πρότερον καλουμένην (id. e. κτίσαι). VI p. 267 C. In essa i Calcidesi potevano vivere accanto ai Siculi, come da Polieno ricaviamo che vi vivevano a Leontini. Le parole quindi Tucidide, VI. 3. 2, ove dice che Teocle e i Caldesi fondarono Leontini πολέμῳ τοὺς Σικελοὺς ἐξελάσαντε, paiono riferirsi all' astuzia, di cui parla Polieno.

Resta però una difficoltà: Che la fattoria posta sul colle Tauro, sopra il promontorio Xifonio, si chiamasse Tauromenio non reca meraviglia, dacchè Tauromenio si chiamava anche la città, che sorge sul monte Tauro sopra Nasso. Ma come si spiega che la città, che sorse sul capo Xifonio, si chiamò Xifonia e non Tauromenio (1)? Mi sembra che risolva anche questo dubbio l'esempio dell'altra Tauromenio. Questo nome rimase infatti ad indicare costantemente la stazione tolta ai Siculi da Teocle, e che divenne la fortezza della città posta ai suoi piedi, la quale si chiamò Nasso e non Tauromenio. Si chiamò invece Tauromenio la città fabbricata sul monte, e il nome di Nasso (sino al V secolo d. C. almeno) indicò il luogo posto sulla spiaggia. Lo stesso possiamo supporre nell'altro caso: Tauromenio fu il nome della fattoria calcidica, che ebbe, a quanto pare, breve e corta vita; la città sorta ai suoi piedi prese il nome di Xifonia, che veniva suggerito dalla forma della penisola. Così benchè Drepanun (la falce) non fosse che il porto di Erice (τὸ Ἐρυκίνων ἐμπόριον Diod. XXIV. II.), nondimeno, quando ereditò la popolazione e la floridezza di quella, continuò a chiamarsi in tal modo in grazia della forma singolare del luogo, su cui sorgeva.

E appunto perchè la Tauromenio meridionale ebbe poca e breve vita e perchè era posta sulla stessa spiaggia orientale, Strabone (o la sua fonte?) la confuse con la più nota città omonima (2). Questo errore non era però nell'opera di Eforo. Il Pseudo Scimno difatti ricorda le singole città calcidiche una accanto all'altra, ed in questo elenco Tauromenio figura come una delle varie fondazioni dei Calcidesi.

Se poi l'errore dipenda da Strabone, che malamente avrebbe compilato il testo di Eforo o dalla sua fonte (Apollodoro?), in cui questo errore sa-

---

(1) Theopomp. adp. Steph. Byz. ad v. = f. 207. in M. *F. H. G.* I p. 312: Ξιφωνία, πόλις Σικελίας; cf. Diod. XXIII. 4. 1.

(2) Così non deve recar meraviglia che Tucidide, nell'elenco delle città elleniche della Sicilia, non ricordi nè la nostra Tauromenio nè Xifonia, perchè egli non menziona le calcidiche Callipolis ed Eubea ricordate da Erodoto, VII. 154, 156, e da Eforo (apd. Strab. et Pseud. Scymn. *ll. cc.*) e non parla di Mile. Tucidide segna a grandi linee l'origine della colonizzazione ellenica in Sicilia e ricorda sol quelle città, che, al tempo di cui discorre, avevano *rem publicam*, e se si sofferma a ricordare con maggior copia di dati lo svolgimento della colonizzazione di Siracusa (egli menziona Casmene ed Acre non aventi *rem publicam*) ciò fa perchè contro costei era diretta la spedizione di Atene

rebbe di già stato accolto, ovvero, se Strabone abbia erroneamente riprodotto Apollodoro non oso decidere. Preferirei però veder qui una svista di Strabone e reputo vi sia un' altra inesattezza anche in questa istessa pagina (VI. p. 268 C.) ove dice che Zancle fu πρότερον κτίσμα dei Nassî. I Nassî infatti poterono rinforzare e dedurne novellamente la colonia Zanclea, e la notizia Straboniana contiene forse un dato vero ed importante, ma da Tucidide, VI. 4. 5. (e ce ne possiamo fidare anche perchè ciò risponde al naturale e necessario svolgimento dei fatti) ricaviamo che Zancle in origine non fu in una stazione dei corsari di Cuma (1).

(1) Non reputo necessario soffermarmi a confutare l' opinione di coloro, che come l'Arnoldt e lo Schubring apd Holm *Gesch. Sic.* II p. 437 pensano che gli Zanclei di Ibla fondatori di Tauromenio siano Siculi. L'Holm osserva giustamente che nel testo di Strabone dovrebbe in tal caso aspettarsi non ζαγκλαίων ma Σικελῶν. Ma anche l'ipotesi di lui: che questi Zanclei sarebbero abitatori di Messana, i quali al tempo di Imilcone e di Dionisio I, allorchè Messana venne distrutta e ripopolata con genti estranee (v. Diod. XIV. 78), avrebbero occupato Ibla etnea e poi la nota Tauromenio, mi pare che non possa in alcun modo sostenersi, e che sia affatto priva di base.

VII.

ENNA E KASMENE

Stefano di Bisanzio alla voce Ἔννα asserisce che era κτίσμα Συρακουσίων μετὰ ο' ἔτη Συρακουσῶν. È vera questa notizia? Tucidide, nella celebre pagina, in cui parla della fondazione delle colonie siceliote, dice che i Siracusani fondarono Acre 70 anni dopo la costituzione della loro città, Casmene 20 anni dopo Acre, Camarina 135 anni dopo il loro arrivo (VI, 5); nulla dice di Enna (Castrogiovanni). La perfetta rispondenza del tempo, in cui secondo Stefano sarebbe stata fondata Enna (settant'anni dopo Siracusa), e di quello, in cui, secondo Tucidide, venne dedotta Acre (Palazzuolo), genera a prima vista il sospetto che Stefano abbia preso un abbaglio. All'Holm non poteva sfuggire questa circostanza e l'ha notata; nondimeno pur dubitando dell'esattezza della data e dell'autorità di Stefano, pur riconoscendo che Enna dovette essere fondata dopo di Acre, e benchè restìo, finisce coll'accettare come vera nella sua sostanza questa notizia e discute e intorno al modo, con il quale l'occupazione di Enna potè esser fatta dai Siracusani e intorno al fine, che essi si prefissero con la nuova colonia (1). A ripudiare del tutto il dato di Stefano di Bisanzio l'Holm è evidentemente impedito da un frammento di Filisto, sfuggito all'esame dei critici a lui precedenti, ove, discorrendosi della guerra fra Camarina e Siracusa dell'Ol. 57, 1 = 552 a C. è detto: Συρακούσιοι δὲ παραλαβόντες Μεγαρεῖς καὶ Ἐνναίους, Καμαριναῖοι δὲ Σικελοὺς καὶ τοὺς ἄλλους συμμάχους πλὴν Γελώων ἀθροίσαντες, Γελῷοι δὲ Συρακουσίοις οὐκ ἔφασαν πολεμήσειν· Συρακούσιοι δὲ πυνθανόμενοι Καμαριναίους τὸν Ὕρμινον διαβάντας .... fr. 8 in M. *F. H. G.* I. p. 186.

(1) Holm *Gesch. Sicil.* I. p. 142, 396; e dietro lui il Busolt *Griech. Gesch.* I. p. 265; II. p. 229 ed il Kaibel, *Inscr. Graec. Sicil. et Ital.* p. 29.

Se la notizia di Filisto fosse esatta non ci rimarrebbe a far altro, qualora ciò fosse possibile, che correggere la data cronologica di Stefano, e di mutare l'o' in un'altra od in altre cifre. Ma può esser vero che Enna fosse colonia dei Siracusani prima del 552? Od anche che gli Ennei fossero allora alleati di costoro?

Mi sembra che quanto sappiamo di certo sulla storia della Sicilia in quel periodo contraddica ad una tale possibilità. Verso la metà del VI secolo lo stato più potente della Sicilia è Agragante; il tiranno Falaride possiede un vasto dominio ed estende la sua egemonia su buona parte dell'Isola. A questa egemonia succede, come è noto, quella di Gela. Difficilmente ad ambedue queste egemonie potè sottrarsi Enna, che era posta, in certo modo, ai confini delle due potenti città elleniche. Solo verso il 600 a C. Siracusa riesce a fondare Camarina, e la sua forza di espansione è più marittima che terrestre. Ed è naturale; essa è tuttora fiancheggiata non solo da Megara Iblea, ma da Leontini, allora nel fiore della sua potenza. È semplicemente assurdo supporre che Megara e soprattutto la calcidica Leontini, la naturale nemica della dorica Siracusa, accordassero il passo ad oriente alla rivale per concederle di dominare nella pianura della calcidica Catane (la sorella di Leontini), (1) e per giungere sino ad Enna.

Ai Siracusani, per por piede in questa fortezza, non rimaneva quindi che una sola via, quella posta a settentrione di Acre. Ma quale via! Era quasi impossibile attraversarla senza possedere una lunga serie di passi fortificati. L'Holm lo riconosce ed a ragione crede, in tal caso, necessario supporre che Siracusa fosse giunta ad impadronirsi di Enna di accordo con le città sicule. Ma una simile ipotesi è addirittura insostenibile. Non vi sono traccie di tanta estensione della potenza Siracusana nel VI secolo, abbiamo invece indizî di una piccola espansione terrestre (2).

---

(1) È appena necessario ricordare che la pianura di Catania nell'antichità si chiamava: campi Leontini.

(2) All'Holm, I. p. 159 pare che un argomento in favore dell'ampia estensione delle relazioni di Siracusa nell'interno dell'Isola nel secolo VI e che collimi con la notizia, che sino d'allora Enna era colonia di quella, sia l'inscrizione di Acre, in cui si fa menzione della porta Selinunzia ossia della porta, che, come egli pensa, conduceva a Selinunte. C. I. G. III n. 5430 = Kaibel, *Inscr. Graec. Sicil et Ital.* n. 217. « Selinus war die erste, » dice egli « nach Akrai im Westen der Insel angelegte

Nè è presumibile che i Geloi, i noti amici dei Siracusani, che ora, come nel secolo V, non vollero congiungere le loro armi con i Camarinesi ed i Siculi ai danni di quelli, si fossero tenuti neutrali, nel caso, in cui i confederati avessero percorso il loro terreno. Difatti se gli Ennei nel 552 presero davvero parte alla guerra contro Camarina, non poterono giungere a Siracusa, senza attraversare o il suolo di Leontini o quello di Gela. D'altra parte, e questo soprattutto è degno di nota, chi ben conosce la storia dell' antica Sicilia converrà che nel secolo VI, allorquando fiorivano Leontini, Megara e soprattutto Acragante e Gela, a Siracusa non era concesso di svolgere quella forza e quella egemonia, che incominciò circa mezzo secolo dopo, allorchè fu conquistata dai Geloi e da Gelone.

A me sembra evidente che nel passo di Filisto si accenni ad una guerra, alla quale non presero parte che popoli vicini a Siracusa ed a Camarina e che la parola Ἐνναίους dei nostri testi sia corrotta. La lotta è intestina, ossia fra Siracusa e la sua colonia di Camarina, che si voleva rendere indipendente. Nel passo di Filisto è detto che a Siracusa si accostò

« Kolonie; Akragas, dessen Gebiet zwischen dem von Akrai und Selinus lag, ist erst später gegründet « worden. Wenn also ein Thor von Akrai nach Selinus, nicht nach dem näheren und bedeutenderen « Akragas hiess, so stammt der Name offenbar aus der Zeit, wo die letztere Stadt noch nicht bestand. « Würde es aber wohl den Einwohnern von Akrai eingefallen sein, das Tor das selinuntische zu « nennen, wenn man durch dasselbe nicht wirklich nach Selinus zog? Der Weg führte durch sikeli- « sches und sikanisches Gebiet; die dazwischen wohnenden Völkerschaften haben also offenbar dem « Landverkehr der Griechen kein Hinderniss in den Weg gelegt. » Questa osservazione non può essere presa in considerazione, perchè l'Holm si è dimenticato che, lungo la via, che da Acre conduceva a Selinunte, v'era Gela fondata circa 60 anni prima di Selinunte, circa 25 anni prima di Acre stessa. (v. THUC. VI. 4. sq.). Ci aspetteremmo pertanto la menzione di una porta Geloa non Selinunzia. Può darsi adunque che questo nome debba la sua origine ad un altro borgo o pago detto pure Selinunte; ma se assolutamente si preferisce pensare alla nota città di Selinunte non resta escluso il caso che tale denominazione sia sorta più tardi. I Selinuntini furono, come è noto, fra i fedeli alleati di Siracusa al tempo della 2.ª spedizione ateniese ed in aiuto d'essi corsero, benchè inutilmente, i Siracusani nel 409 a C. allorchè la città loro fu presa e distrutta dai Cartaginesi, e poco dopo Selinunte fu, alla meglio, restaurata dal siracusano Ermocrate. Si potrebbe pensare che i Siracusani abbiano dato ricetto in Acre a quelli fra i Selinuntini, che preferirono l'esilio al vivere nella patria schiava ormai di Cartagine, (cf. DIOD. XIII. 57 sqq.; 114) allo istesso modo che essi, quattro anni dopo, nel 405 a. C., accolsero in casa propria i Camarinei ed i Geloi, che fuggivano davanti ai Cartaginesi (DIOD. XIII. 111 sqq.).

Megara. Questa notizia dovrebbe sorprenderci; nel corso degli avvenimenti si manifestarono chiaramente le gelosie di Siracusa contro Megara, che fu distrutta da Gelone. Nè parrebbe credibile che i Megaresi, nemici dei Corinzî nella madre patria, fossero ben disposti verso la corinzia Siracusa. Nondimeno è probabile che la prepotenza della ionica Leontini, con la quale i Megaresi Iblei non serbavano buoni rapporti sin dal tempo della fondazione della loro città, e con la quale erano in lotta circa mezzo secolo prima del tempo, di cui discorriamo, li abbia consigliati a stringersi alla potente città consanguinea (1). Il comune pericolo può dunque aver indotti i Siracusani ed i Megaresi ad una comune difesa contro i vicini Joni; ed è poi naturale che, dal canto suo, Camarina trovasse dei volenterosi alleati negli indigeni ossia nei Siculi, che, al pari di essi, erano intolleranti del giogo siracusano.

Chi sono questi altri cittadini, questi Ἐνναῖοι, che si uniscono a Siracusa? Evidentemente, secondo il mio avviso, non possono qui essere alleati di Siracusa che i suoi coloni. Oltre Camarina, e prima di essa, Siracusa aveva fondato Acre e Casmene. Non ci è serbata memoria di una ribellione verso Siracusa da parte di Acre, nè da parte di Casmene, per il tempo in cui questa seconda esistette. Sappiamo anzi che Casmene fu il rifugio dei geomori siracusani, che vennero ricondotti in patria da Gelone, allorchè questi di Siracusa divenne signore (2). Non vi sono ragioni per supporre che la parola ΜΕΓΑΡΕΙΣ sia corrotta nel testo di Filisto e che vi si debba sostituire ΑΚΡΕΙΣ (3) ma spero di trovare qualche critico, che mi darà ragione, se io alle susseguenti parole ΚΑΙ ΕΝΝΑΙΟΥΣ sostituirò ΚΑΙ ΚΑΣΜΕΝΑΙΟΥΣ.

Tutte le probabilità storiche stanno, credo, per la mia correzione e le

---

(1) Sono noti i maltrattamenti dei Leontini verso i Megaresi, che da principio parteciparono alla loro colonia (v. Thuc. VI. 4. 1; Polyaen. V. 5. 1). La inimicizia fra le due città durava ancora al principio del VII secolo, al tempo in cui a Leontini dominava Panezio (verso il 608) v. Polyaen. V. 47.

(2) Herodt. VII. 155.

(3) È lecito dubitare che Acre fosse, nei tempi più antichi, altra cosa che un semplice castello di Siracusa. L'autonomia municipale ottenne solo all' epoca romana ed a spese del territorio siracusano. Le sue monete non vanno al di là del II° secolo. v. Head. *op. cit.* p. 103.

ragioni paleografiche si accordano interamente. E se avrò colpito nel segno, avrò pure avuta la fortuna di scoprire un nuovo fatto storico, ossia la partecipazione alla guerra del 552 di una città, della quale, fin ora, non sapevamo altro che il nome, l'origine siracusana e la fedeltà mostrata ai geomori, ossia al partito aristocratico, al principio del V secolo (1).

---

(1) Ove precisamente esistesse Casmene non è possibile indagare. Dal passo di Erodoto, VII. 155, ed anche da quello di Filisto, che abbiamo qui discusso, può solo ricavarsi che essa si trovava a sud-ovest di Siracusa. Le identificazioni di Casmene con Siculi, Spaccaforno etc. non riposano su solide basi.

VIII.

ERGEZIO E NASSO

I più chiari numismatici sogliono, in generale, considerare come una moneta italiota il seguente statere d'argento del peso normale di gr. 7, 90:

MEP, Dioniso barbato nudo in piedi, che tiene un cantaro nella destra, un ramo di vite nella sinistra.

℞: tralcio di vite con grappolo.

ed il suo dodicesimo:

MEP, protome di Dioniso barbato

℞: grappolo.

Il Garrucci, pure pubblicando tali nummi fra le monete d' Italia, non sa a quale città assegnarli, il Poole seguendo il Sambon assegna lo statere ad una delle città incerte della Lucania o del Bruzzio, ed anche l' Head crede poterlo con probabilità attribuire a questa regione (1). Le ragioni, che indussero i numismatici inglesi ad attribuire alla Magna Grecia e precisamente al Bruzzio questa moneta sono, se non m' inganno, quelle stesse che valsero a far emettere questa ipotesi al Sambon, il quale faceva osservare come uno dei rarissimi esemplari dello statere ergetino (da lui attribuito dubbiosamente a Merusium), del peso di gr. 7, 90 fosse stato trovato nel ripostiglio calabrese del 1863, insieme a monete incuse delle

(1) Garrucci, *op. cit.* II. p. 154 tav. 111 n. 9 e 10; Sambon, *Recherches sur les monnaies de la presqu' île italique* (Naples 1870) p. 339 pl. 22. 7. 8. che, seguendo il Sestini, dalla erronea leggenda M E P è indotto ad attribuirla alla siciliana Merusium, che non è mai esistita; Poole, *Catalogue of the greek Coins, Italy* p. 395 n. 1; Head, *op. cit.* p. 98. I due esemplari dello statere pubblicati dal Sambon pesano l' uno gr. 8, l' altro 7, 90, il Poole e l' Head danno il peso normale di gr. 7, 90 = grani 122.

achee Caulonia, Crotone, Lao, Metaponto, Sibari, ad arcaiche monete di Poseidonia, di Taranto e di Caulonia stessa, di cui 40 stateri pesavano pure gr. 7, 90 (v. op. cit. p. 34). Anche lo stile dello statere ergetino lo confermava in questa convinzione, che cioè esso non fosse di fabbricazione siceliota bensì italiota.

Eppure già il Sestini (apd. Sambon) vide che si trattava di una moneta siciliana ed il de Luynes (*La monnaie de Servius Tullius* p. 29 pl. 4 citato dal Garrucci l. c.) capì che si trattava della sicula Sergentium. E non può essere diversamente; basta un semplice sguardo alle monete arcaiche di Naxos, della fine del VI secolo, per convincere i più dubbiosi. Ecco la descrizione di una delle antichissime dramme di Nasso del peso normale di circa gr. 5, 90 [1]

Protome di Dioniso barbato

℞: tralcio di vite con grappolo : *NAXION*

I punti di contatto non potrebbero essere maggiori, sia per i tipi in sè, sia per l'arte. La protome di Dioniso incisa nel duodicesimo dello statere di Sergezio è analoga a quella della dramma nassia; il rovescio di questa pare inciso dallo stesso artefice, che modellò quello dello statere ergetino. Anche la paleografia della leggenda dello statere ci riconduce alla fine del VI secolo, tutto al più al principio del V, ossia ai tempi, in cui fu battuta la moneta di Nasso testè esaminata. Non vi può adunque essere dubbio; la nostra Sergetio non è l'Ergitium presso Arpi nella Daunia, alla quale si potrebbe anche pensare, ma la nota Sergezio od Ergezio dei Siculi [2].

Studieremo fra poco la ragione, per cui fra le monete delle due città non vi sia un'esatta rispondenza ponderaria; per ora cominciamo dal constatare come mediante l'esame di esse ci è concesso, se non risolvere, per lo meno meglio determinare il problema della topografia di questa città sicula.

---

(1) Circa il peso delle monete arcaiche di Nasso v. IMHOOF-BLUMER, *Le Systeme monetaire euboique* nell' *Annuaire d. l. Soc. Numism.* (Paris 1882) p. 13 estr.; cf. HEAD, *op. cit.* 139; POOLE, *Catal. Sicily*, p. 1!8.

(2) La forma Σερ(γετίνων) della moneta sta rispetto alla forma letteraria 'Εργέτιον, come il ΣΕΓΕΣΤΑΞΙΒΕΜΙ delle monete arcaiche di Segesta sta rispetto alla forma ellenica Ἔγεστα.

Ove fosse Ergetium è ignoto. Da un racconto di Polieno, V, 6, in cui si narra l'astuzia, della quale si valse Ippocrate di Gela (verso il 494) per impadronirsene, si ricava che essa era su di un luogo forte non lungi dal campo Lestrigonio o di Leontini. Dalle parole di Stefano Bizantino ad v.: τὸ ἐθνικὸν 'Εργετῖνος καὶ Αἴτνη 'Εργετίνη veniamo confermati sempre più nella persuasione che non fosse lungi da quel campo, in cui Ippocrate vi fece perire i cittadini, che si erano a lui uniti come mercenari, e che si trovasse quindi alle radici dell' Etna. Le monete, che testè a lei abbiamo rivendicate, e che sono o di pochi decenni anteriori o contemporanee di Ippocrate, dimostrano sempre più che essa era non lontana dalla calcidica Naxos, la quale al pari di Ergezio, della nassia Callipolis e delle pure calcidiche Leontini e Zancle, fu preda del terribile tiranno geloo (v. Herodt. VII. 154). Qualora di Ergezio esistesse ancora qualche rudere, questo si dovrebbe cercare su qualche poggio alle falde orientali del gigante siciliano, là ove il sole congiunto alla vigoria dell'Etna faceva germogliare quelle viti, che rendevano felici i Nassî e gli Ergetini, ed ove, anche ora, i vigneti lussureggianti per la loro vigoria e bontà destano lo stupore del pellegrino, che visita quella bellissima fra le belle costiere d' Italia e d'Europa.

Sarà in seguito possibile meglio determinare il luogo, dove fu Ergezio? Lasciamone la cura ai dotti locali e soffermiamoci invece a notare come la perfetta somiglianza tra le monete delle città siceliota e sicula ci dimostri come fra le due città e fra le due genti esistessero rapporti commerciali. Tucidide, là ove discorre della prima spedizione fatta dagli Ateniesi in Sicilia e dell'assedio, che i Messanii alleati di Siracusa posero a Nasso, dice che: οἱ Σικελοὶ ὑπὲρ τῶν ἄκρων πολλοὶ κατέβαινον βοηθοῦντες ἐπὶ τοὺς Μεσσηνίους IV. 25. 9. Ciò che diè animo ai Nassî, che vedendo pur sopraggiungere i Leontini e gli altri alleati ellenici fecero una sortita, in cui uccisero mille Messanî, che vennero messi in fuga, e che nella ritirata vennero uccisi da βάρβαροι ossia dai Siculi (estate del 425 a C.). Che fra costoro ci fossero anche gli Ergetini apparirà probabile ora che le monete ci provano i buoni rapporti fra le due città, dacchè tutto fa credere che a quel tempo Ergezio esistesse. Ippocrate la fece, è vero, occupare per conto suo, ma non è detto che la distruggesse o che le facesse provar sorte più dura di quella, che toccò a Nasso, cui pure assediò (v. Herodt. VII. 154). Ergezio difatti è ricordata da

Plinio (N. H. III. 8. 91) e da Tolomeo (III. 4. 7.). Tanto più ciò pare probabile se si osserva che ai Nassî giunsero aiuti anche dai Leontini ossia dal sud, ove si trovavano necessariamente anche gli Ergetini.

Ma più che lo stabilire se gli Ergetini in quella occasione porsero o no aiuto ai Nassî, a noi preme dimostrare come fra il passo di Tucidide e l'identità di tipo e d'arte delle monete di Nasso e d'Ergezio c'è un punto di contatto. Ed è che ambedue tendono a dimostrare i buoni rapporti, che intercedevano fra gli indigeni, i Siculi da un lato, e le città calcidiche-ionie dall'altro. A giudicarlo dalle monete, gli Ergetini parrebbero non meno ellenizzati di quello, che furono poi gli Elimi di Segesta. Quanta differenza fra i rapporti, che correvano fra i Siculi e Siracusa! Mentre gli autori ci dipingono i Siculi sempre disposti alla ribellione verso la potente città dorica, mentre li vediamo sempre desiderosi di scuotere il giogo di lei, qui i Siculi si appalesano amici sinceri ed affezionati delle città ioniche! Non v'è forse anche qui un indizio della differenza del carattere delle due stirpi e del diverso, anzi opposto sistema, con il quale procedeano nella loro opera di conquista? Certo l'amicizia fra i Nassî e gli Ergetini ricorda la politica degli Achei dell'Italia. Sibari e Crotone seppero rendersi amiche le popolazioni dell'interno, e forse è un caso analogo al nostro quello di Pandosia, la capitale degli Enotri, (v. Strab. VI. p. 256 C.) le cui monete della metà del V secolo rivelano lingua e costumi ellenici ed anche l'alleanza con Crotone (1).

Resta infine che discutiamo perchè mentre Nasso alla fine del VI o al principio del V secolo batte dramme che ricordano il sistema ponderario eginetico leggermente ridotto da lei come dalle sorelle città calcidiche di Cuma, di Reggio, di Zancle e di Imera, la vicina ed amica Ergezio si valga di stateri, che ricordano quelli di quasi ugual peso delle città achee della Magna Grecia (gr. 8, 164), che alla lor volta seguivano il sistema corinzio, cui riducevano (gr. 8, 424) (2).

La ragione di questo fatto me la suggerisce l'Imhoof-Blumer, il quale avendo già osservato come le dramme del peso normale di circa gr. 5, 90

(1) Head, *op. cit.* p. 90; cf. Garrucci, *op. cit.* II. p. 147.

(2) v. Head *op. cit.* p. LII; p. 61 sgg. cf. Hultsch, *Griech. u. röm. Metrologie*, 2 ° *Bearb.* (Berlin 1882) p. 674 sgg.; Sambon, *op. cit.* p. 339; cf. 34.

di Reggio, di Zancle, di Imera, di Nasso, siano un terzo dei tetradrammi trovati per Reggio, Zancle e Messana, che pesano sino a gr. 17, 70, ha emessa la probabilissima congettura che queste città battessero le loro monete in modo da poter servire e agli scambi e con le città che, come la madre patria, l'Eubea, e l'Attica seguivano il sistema del tetradramma del peso normale di gr. 17, 464 e con quegli stati che, come quelli del Peloponneso, Corcira, Creta, si attenevano al sistema eginetico ridotto (¹).

Ergezio seguiva il sistema ponderario delle città achee d'Italia, ma tale sistema non accettò certo per effetto di un diretto commercio con quelle città, bensì mediante Nasso, della quale appunto imitò il tipo dei suoi stateri. E che questi derivino dalle monete di Nasso, se pure di ciò fosse necessaria la prova, mostrerebbe il fatto che i duodicesimi degli stateri di Ergezio pesano appunto quanto gli oboli di Nasso della stessa età e della stessa forma e tipo delle rispettive dramme (²).

È naturale invece pensare che Nasso, allorchè incominciò a battere moneta, o contemporaneamente alle dramme di peso eginetico ridotto, o poco prima, abbia emessi stateri del sistema analogo a quello, che nella seconda metà del VI secolo vigeva fra le città achee della Magna Grecia (³). Nulla significa il fatto che non si conoscono simili stateri nassî; ciò vorrebbe dire semplicemente che questi stateri non sono ancora stati ritrovati. Non mancano forse i tetradrammi nassî del peso di gr. 17, 70, che abbiamo invece nelle città sorelle di Reggio e di Zancle, e che sono presupposti dalle dramme nassie del peso di gr. 5, 90? Dovremo adunque conchiudere che Nasso strinse relazione commerciale anche con le città achee della Magna Grecia. E questo pensiero troverebbe conferma e nel fatto già notato, che uno dei due rarissimi stateri ergetini, editi dal Sambon, fu scoperto nel Bruzzio accanto a molte monete incuse delle città achee, delle

(¹) Imhoof-Blumer, *Le syst. mon. eub.* p. 5 sgg. estr. Giustamente egli reca a titolo di confronto il sistema monetario di Corinto, il cui statere equivaleva ad una didramma eubea-attica, ed il cui terzo di statere si poteva scambiare con un tetrobolo ad Atene, con un emidramma ad Egina.

(²) V. Poole, *Sicily*, p. 118, n. 4. 5

(³) Quale di queste due ipotesi sia la più probabile non v'è modo di stabilire. Nasso, come è ormai noto, al pari delle altre città calcidiche, verso il tempo di Gelone e di Terone di Agrigento, abbandonò interamente il sistema eginetico per attenersi esclusivamente a quello attico.

quali monete la grande maggioranza apparteneva a Crotone (n. 61 su n. 44 delle rimanenti città) e insieme a molte delle più antiche monete di Taranto (n. 15) di Poseidonia (n. 14) e di Caulonia (n. 40). Si potrebbe forse anche far valere a questo proposito la circostanza che il Dionysos dello statere ergetino ricorda talvolta per le proporzioni del corpo e per l'anatomia, per l'arte insomma la figura virile, che è espressa negli stateri incusi della achea Caulonia (v. ad es. Garrucci, op. cit. II. tav. 111. n. 9. 11); quelle monete parrebbero essere il prodotto di una stessa scuola artistica, ma la mancanza di buoni ed esatti disegni degli stateri ergetini mi trattiene dall' insistere di soverchio su questa considerazione.

Ma che realmente Nasso avesse stretti rapporti con le città achee, risulta dalla testimonianza degli antichi, i quali la enumeravano tra le città liberate e visitate da Pitagora (1), da quel Pitagora, cui Aristosseno considerava fondatore della lega mensurale e ponderaria degli Italioti, la quale lega fu certo una conseguenza della costituzione o ricostituzione della lega politica achea avvenuta al tempo del grande pensatore e legislatore di Samo (2).

(1) V. Lambl. *de vit. Pythag.* 33, 122, 134; Porphyr, *de vit. Pythag.* 21. 27. 29. Che quanto è detto da costoro a questo proposito non sia del tutto indegno di fede e che, per lo meno, Pitagora abbia avuto relazione con Nasso indica un frammento di Cicerone *de cons.* n 3. ed. Baiter et Kayser, vol. XI. p. 75. Che se tutti e tre questi autori parlano di Tauromenio e di un giovane tauromenitano, è evidente che si intende parlare di Nasso, con quella qui ed altrove confusa (v. ad es. Plin. *N. H.* III. 88). Del valore di queste notizie discuterò in modo speciale altrove.

(2) V. Arist. apd Laert. Diog. VIII. 14. = M, *F. G. H*, II. p. 274 n. 10. πρῶτον εἰς τοὺς Ἕλληνας (cioè quelli della Magna Grecia) μέτρα καὶ σταθμὰ εἰσηγήσασθαι

IX.

LA DISFATTA DEGLI ATENIESI ALL'ASSINARO

Nelle pagine immortali, in cui Tucidide racconta la grande spedizione degli Ateniesi contro Siracusa, porge anche sufficienti notizie intorno alla via tenuta da costoro allorchè, vinti nelle battaglie navali, chiusi nel porto, nella fuga cercarono lo scampo. Riuscito vano il tentativo di superare la vallata ove era l'Acraion Lepas e di guadagnare l'altipiano acrense, gli Ateniesi partono nel cuor della notte, piegano verso il mare, sull' alba si trovano nella via che conduceva all'Eloro (ὁδὸς Ἐλωρινή), e si dirigono verso il fiume Cacyparis, nella speranza di poterne risalire la vallata e di giungere per questa sull' altipiano di Acre.

Ma la Cacyparis, invece di trovare i Siculi, che vi aspettavano, si imbattono in un presidio siracusano. Riescono nondimeno a sgominarlo e ad oltrepassare il fiume: i comandanti danno l' ordine di procedere oltre verso un altro fiume, l' Erineo. Frattanto Gilippo ed i Siracusani raggiungono verso il mezzogiorno (περὶ ἀρίστου ὥραν VII. 81) una parte de' fuggiaschi ossia la retroguardia comandata da Demostene, la quale procedeva non ordinata e lentamente. Dopo una lotta durata molte ore (δι' ἡμέρας) Demostene e gli Ateniesi abbandonati da una parte degli alleati capitolano. Erano sei mila e vennero tosto condotti a Siracusa. L' avanguardia comandata da Nicia che procedeva invece in buon ordine e celeremente, si trovava distante 50 stadi, ossia 7 chilometri e mezzo, allorchè la retroguardia fu sorpresa da Gilippo e continuò a camminare, finchè Nicia giunse all'Erineo, ove si accampò su di una altura. Nicia, dice Tucidide, pensava che la salvezza fosse da cercare nell' affrettarsi, nell' evitare di combattere e nel ritirarsi il più celeremente (VII. 81. 3.).

L'indomani Nicia veniva informato della capitolazione di Demostene, ma a tal notizia non prestò fede e la giornata passò in parlamenti ed in scaramuccie. Nel giorno a quello seguente di buon'ora, Nicia diè ordine di muovere il campo e continuò la marcia verso l'Assinaro. Gli Ateniesi si facevano premura di raggiungerlo, perchè speravano che i guai sarèbbero scemati dopo il passaggio di quel fiume (οἰόμενοι ῥᾷόν τε σφίσιν ἔσεσθαι ἢν διαβῶσι τὸν ποταμόν 84) e perchè erano stanchi ed assetati; ma ivi giunti rupper le ordinanze vi si precipitarono e per guadarlo e per bere. I Siracusani furono loro addosso e li saettarono anche dalle ripide sponde del fiume (κρημνῶδες), che essi avevano attraversato. L'esercito ateniese vi fu interamente distrutto. Quelli, che non perirono o che non riuscirono a fuggire, vennero fatti prigionieri e chiusi nelle latomie; ove, di 40 mila che avevano tentato la fuga furono raccolti soli 7 mila; ed anche di costoro buona parte, e per le intemperie e per la fame, lasciò miseramente la vita Tale, è in breve, il pietoso racconto di Tucidide (VII. 78-87).

La via elorina tenuta dagli ateniesi è nota, ed è pure riconosciuto che il fiume Cacyparis è l'odierno Cassibile. Si disputa invece sull'Erineo e sull'Assinaro.

Il più dotto storico della Sicilia antica, che è in pari tempo l'autore del miglior studio topografico su Siracusa, l'Holm, suppone che l'Erineo sia il torrente oggi secco detto la Cavallata, che l'Assinaro sia la Falconara o fiume di Noto, e combatte l'opinione di coloro, i quali, come il Leake, identificano l'Erineo con la Falconara o Fiume di Noto, l'Assinaro con lo stesso fiume, che nell'antichità ebbe il nome di Eloro, e che oggi si chiama volgarmente il Tellaro (1).

Gli argomenti degli avversarî dell'Holm sono questi. Plutarco (*Nic.* 28) dice che i Siracusani per perpetuare il ricordo della vittoria sull'Assinaro istituirono la festa detta Assinaria. Ora questa è la stessa cosa dell''Ελώριος ἀγών, di cui parla Esichio (2); ed è in ricordanza di questa festa che

(1) V. Holm, *Gesch. Sicil.* II. p. 400 sg ; *Die Stadt Syrakus im Alterthum* p. 154 sgg. mi valgo dell'edizione rifatta, con il consenso dell'autore, dal Lupus, perchè è più accessibile agli studiosi della assai costosa e meno diffusa edizione italiana pubblicata con vano lusso dal nostro ministero dell'istruzione.

(2) Hesych. ad v 'Ελώριος ἀγών· τελούμενος ἐπὶ 'Ελώρου ποταμοῦ.

non lungi dalle sponde dell' Eloro fu posta una colonna greca, che si vede tuttora [1]. L'Holm risponde facendo osservare che non è probabile che il fiume Eloro, assai noto nell'antichità, venisse detto anche Assinaro e che questo secondo nome comparisce solo quando si fa menzione della strage degli Ateniesi. Osserva come non si possa provare che sia di quel tempo la colonna, di cui si discorre, e come essa non si trovi presso all' Eloro, bensì fra questo, ossia il Tellaro, ed il Fiume Noto, ossia la Falconara. Aggiunge infine che la Falconara ha le sponde ripide come Tucidide asserisce a proposito di quelle dell' Assinaro.

Due anni or sono mentre attendeva a visitare i luoghi resi celebri dalle pagine di Tucidide, volli pure percorrere la via fatta dagli Ateniesi nella fuga e visitai i due fiumi ed il luogo, in cui si trova la colonna. Frutto delle mie escursioni fu la convinzione che l' Erineo fosse il fiume di Noto, che l'Assinaro fosse il Tellaro, e mi parve pure degna di cons derazione l'opinione di coloro i quali pensano che la colonna sia stata proprio innalzata a ricordare la vittoria dei Siracusani.

Il primo elemento che deve essere studiato per risolvere questa questione è il testo di Tucidide. Abbiamo veduto come l' esercito di Demostene avesse oltrepassato il Cacyparis insieme all' avanguardia condotta da Nicia e come verso l' ora della colazione questi si trovasse di già 50 stadî distante dal collega. Fra il Cacyparis o Cassibile e la Cavallata sono circa 67 stadî; fra la Cavallata e la Falconara circa 13 stadî [2]. Se l' Erineo, ove Nicia giunse dopo il mezzogiorno, (sul far della sera?) fosse la Cavallata, egli avrebbe percorsi meno di 17 stadî, (circa due chilometri e mezzo) in una mezza giornata, se invece l' Erineo è la Falconara ne percorse quattro e mezzo. L'esercito di Nicia era stanco al pari di quello di Demostene, aveva camminato tutta la notte (v. Thuc. VII. 81. 1). Ci spieghiamo sino ad un certo punto perchè nella seconda metà della giornata abbia proceduto così poco. Ma questa ragione non basta. Può, deve anzi supporsi che il traghettare l' Erineo abbia portato via del tempo, e che Nicia giunto ad una vallata, che si proponeva risalire per giungere sull'altipiano acrense abitato dai

(1) Vedila disegnata dall' Houel, *Voyage* III. tav. 103.

(2) Per le distanze in istadi e per la lunghezza dello stadio di Tucidide, v. le osservazioni dell' Holm, *Die Stadt Syrakus* p. 24. nota.

Siculi alleati, attendesse per ciò fare che arrivasse la retroguardia, cui non vedeva comparire, e della quale non aveva notizie; tanto è vero che l'indomani non volle prestar fede ai nemici, allorchè gli notificarono la capitolazione di quella.

Poichè è evidente che Nicia, dopo il mezzogiorno, andò a rilento, è chiaro che dal testo di Tucidide non ricaviamo un dato sufficiente per stabilire se questi si accampò alla Cavallata o alla Falconara. Nondimeno se si considera che egli mirava a risalire con Demostene la valle del Cacyparis (VII. 80. 5.) e che dal far ciò fu impedito dal presidio siracusano, noi troveremo probabile che si sia soffermato all' Erineo per lo stesso fine. Altrimenti egli avrebbe molto più progredito; nè desideroso com' era di sottrarsi presto al pericolo (v. VII. 81. 3) avrebbe camminato per tutta la sera, nè avrebbe solo percorsi due chilometri e mezzo o quattro e mezzo, ossia tanta via quanta in un paese piano, anche se molestato dai nemici (nè che ciò avvenisse è accertato), si poteva fare in un' ora di cammino. Ora se noi diamo uno sguardo ad una buona carta oro-idrografica della regione possiamo stabilire che la sola via utile per raggiungere questo fine è la valle della Falconara, che al pari di quella del Cassibile si interna verso l'altipiano, e che conduce verso quei luoghi, ove fu Neto la città sicula (1). E uno sguardo alla carta mostra come in questa regione vi siano tre soli fiumi: il Cassibile, la Falconara, il Tellaro, ossia i tre soli fiumi, che nomina Tucidide, il Cacyparis, l'Erineo, l'Assinaro.

Non v'è adunque ragione di cercare l'Erineo nella Cavallata, in un torrente disseccato. È vero che Tucidide asserisce (VII. 79), come l'Holm nota, che quattro giorni prima della battaglia dell'Assinaro (12 Settembre 413) erano cadute le prime pioggie di autunno (9 Settembre) (2) ed è pur vero che nell'antichità, come l'Holm giustamente dice, i fiumi siciliani erano più ricchi di acqua (acqua che oggi è scemata in causa dei terremoti e del diboscamento) ma si deve anche notare che le acque non poterono gonfiare, per molto tempo, un torrente del corso di circa 7 chilometri quale

(1) Che ivi fosse di già Neto non risulta in alcun modo. Ma quella posizione importantissima dal punto di vista strategico probabilmente doveva essere di già occupata dai Siculi nemici di Siracusa ed amici degli Ateniesi.

(2) Sulle date v. Holm, *Die Stadt Syrakus*, p. 158.

è la Cavallata. Nè è il caso di pensare che il continuo diboscamento abbia oggi reso più povero d'acque quella regione, perchè essa allora come oggi, era coltivata ad ulivi (Thuc. VII. 81. 4.).

A ciò si aggiunge la menzione della festa detta Assinaria, che assai probabilmente è l'῾Ελώριος ἀγών di Esichio, dacchè non sappiamo di altre vittorie conseguite dai Siracusani sulle sponde dell' Eloro. Sappiamo invece di una sconfitta patita dai Siracusani su questo fiume, ove essi furono vinti da Ippocrate di Gela (1). Ma è chiaro che Gelone ed Ierone di Gela, i tiranni di Siracusa, non mantennero la nota loro popolarità col ricordo di una tale vittoria. Ad essi stava troppo a cuore il far dimenticare la loro origine geloa. Nè la democrazia siracusana, dopo la cacciata del dinomenide Trasibulo, avrebbe festeggiata la vittoria del potente tiranno di Gela.

Ed ancor più dimostrerebbe che l' Eloro e l' Assinaro sono un sol fiume la colonna, che è posta non lungi dal Tellaro. Essa è una bella ed alta colonna dorica, che parrebbe innalzata al fine di perpetuare un ricordo lieto di Siracusa (2). Non è proprio sull' Eloro, ma è assai più vicino a questo che alla Falconara, dacchè dista dal primo soltanto un chilometro, mentre (3) la Falconara è lungi oltre 3 chilometri. Il non trovarsi proprio sulle sponde del Tellaro non prova nulla. La battaglia o, diremo meglio, la strage dell'Assinaro prese il nome di questo fiume perchè ivi ebbe luogo l' ultimo atto del dramma. Ma la battaglia incominciò e lo

(1) V. Herodt. VII 154; Sch. Pynd. *Nem.* IX. 95.

(2) Essa non è costruita di tamburi sovrapposti l'uno sull'altro come le colonne dei templi dorici di Selinunte e di Agrigento, ma di vari pezzi fra loro congiunti e già rivestiti di stucco. Ne è scanalata come dovremmo attenderci in una colonna dorica. Ma queste circostanze non hanno molto peso per non reputarla un monumento del secolo V, dacchè più che una colonna essa dovrebbe essere considerata come un pilastro che reggeva un anathema come un tripode ad una Nike. Come esempio di confronto mi sia lecito citare l'alto pilastro triangolare ritrovato ad Olimpia nel 1875 (alto m. 4, 60) che reggeva la Nike di Paionios e che fu dedicato dai Messeni di Naupatto verso il 421 a. C. v. Paus. V. 26. 1; *Inscr. Antiq.* del Röhl. n. 348; *Ausgrab. zu Olympia* II. tav. 34.

(3) L' asserzione dell'Holm-Lupus, *Die Stadt Syracus* p. 158 che la colonna, di cui parliamo, stia fra il Tellaro ed il fiume di Noto, è erronea. Vedasi la carta topografica dello Stato Maggiore italiano ove tale colonna (detta anche oggi, come al tempo del Fazello la Pizzuta) è appunto indicata. Essa è posta a pressochè uguale distanza dal Tellaro e da un altro piccolo torrente, che scorre più a nord, il Laufi, nome già noto al Fazello, v. *Dec.* I. 4. 2, il quale, ivi, parla pure della colonna posta nella località della Saccollino.

dice chiaramente Tucidide (VII. 84) allorchè, sul far del giorno Nicia, mosse dalle sponde dell' Erineo per giungere a quelle dell'Assinaro. Essa sarebbe quindi stata posta presso al fiume, sulle cui sponde la battaglia ebbe termine, sopra un leggiero altipiano non lungi dal mare, d' onde si dominava la vicina foce dell'Eloro. La posizione della colonna confermerebbe adunque il racconto di Tucidide. Nondimeno la mancanza di un buono studio architettonico su questa colonna e sull' altra che si trova sulle sponde del Tellaro superiore nel luogo detto Saccollino, mi vieta di valermi con tutta sicurezza di questo argomento. Tanto più che può ben darsi che gli Ateniesi abbiano tentato di valicare il fiume un poco più ad occidente.

Non può ad ogni modo asserirsi che solo le sponde della Falconara siano ripide. Anche quelle del Tellaro là ove esso sbocca sul mare, nella direzione della colonna sono abbastanza ripide in varî punti, per spiegare il passo di Tucidide, come ho potuto constatare io stesso allorchè percorsi questa regione (1).

Non vi sono adunque ragioni sufficienti per identificare l' Erineo con la Cavallata, l'Assinaro con la Falconara. Vi sono invece maggiori probabilità per reputare che la Falconara sia l' Erineo, e che l' Assinaro non fosse altro che l' Eloro, il moderno Tellaro.

Ma può darsi che il fiume Eloro abbia in pari tempo avuto il nome di Assinaro? Non sarebbe il primo caso, in cui uno stesso fiume abbia avuti due nomi. Per cercare un esempio nella stessa Sicilia, ricorderò, come l'Heisterbegk abbia dimostrato che il fiume Sicanos non era altro che l'Himera meridionale (2). E per citare anche un esempio tolto fuori dall'Isola faccio

(1) Ed ho con me Pindaro, che parlando delle gesta di Cromio all' Eloro dice *Nem.* IX 95 « βαθυκρήμνοισι δ' ἀμφ' ἀκταῖς Ἑλώρου. Un altro argomento in favore della mia tesi lo si potrebbe trovare anche nella seguente circostanza: Tucidide (VII. 84. 1 sq.) dice che all'apparir dell'alba Nicia lasciò l' Erineo per giungere all'Assinaro, e che ivi giunti gli Ateniesi vi si precipitarono per la stanchezza e la sete. Siamo al 12 Settembre ossia in un tempo ancor caldo e si capisce che essendovi fra la Falconara e l' Eloro cinque chilometri e che d' altra parte essendo perseguitati dai Siracusani gli Ateniesi procedessero lentamente ed avessero sete, poche ore dopo essersi mossi. Ma questa circostanza si comprenderebbe assai meno, se si ammettesse che dalla Cavallata fossero andati alla Falconara, dacchè fra questi due corsi d'acqua intercedono meno di due chilometri.

(2) Heisterbergk, *Fragen der ältesten Geschichte Siciliens* (Berlin 1869) p. 45 sgg.

notare come fossero un sol fiume il Padus ed il Bodincomagus, che venne poi identificato con l'Eridanus. Lo stesso Eloro avrebbe avuto un terzo nome, come si rileva da Vibio Sequeste che dice: " Herbesos qui et † Endrius (e. i. Elorius) oppido Alorino (i. e Elorino) decurrit per fines Elori „ (1). Il Fazello ci fa sapere come al suo tempo, nel suo corso inferiore, il Tellaro non si chiamasse più così, ma bensì " Abisus „ nome nel quale non è difficile rintracciare l'antico Erbesus, ossia il terzo nome del nostro fiume (2). Due, anzi tre nomi per lo stesso corso d'acqua non sorprendono affatto, quando si consideri che l'Eloro, come gli altri testè citati era un fiume di confine. Il nome Eloro, comune anche al castello posto alla foce del fiume, parrebbe essere di origine Siracusana (cf. Ἐλώριος ἀγών ed ὁδὸς Ἐλωρινή); Erbesso fu certo il nome, che gli davano gli Erbessini abitatori della regione posta lungo il corso superiore. Il nome Assinaro pare indicasse il corso inferiore fangoso il " praepingue solum stagnantis Helori „ (v. Verg. Aen. III. v. 698).

Se si considera che, secondo una legge e nei tempi antichi ed anche oggi costante in Sicilia, le città traevano il loro nome dal fiume che scorreva accanto o viceversa (3), e che la città di Eloro non si trovava sulle sponde del Tellaro, ma bensì su quelle del fiumicello vicino (circa due chilometri a nord) detto Laufi ove il Fazello, l. c., vide molte e cospicue rovine; e se si tien conto che sulla foce del Tellaro si trovava invece il castello di Eloro, ricordato anche da Plinio (4) verremo alla facile con-

(1) E che vi fosse realmente un fiume « Erbessus » provano le monete della città di Erbesso, in cui il fiume è rappresentato colla solita protome antropo-taurina. v. Imhoof-Blumer, *Monnaies grecques* p. 19 pl. A. 21 le quali monete provano sempre più quanto io altrove cercai dimostrare (v. *Alcune osservazioni sulla storia e sulla amministrazione della Sicilia durante il dominio romano* (Palermo 1888) p. 46 sgg. nota 1, che Erbesso non deve cercarsi, come si fa generalmente, lungo il corso dell'Anapo o a Pantalica o a Sortino, bensì di fronte ad Acre non lungi da Buscemi là ove hanno le loro origini il corso dell'Anapo e quello dell'Erbesso od Eloro superiore.

(2) Fazello l. c. « et defluens pontem ipsum Bayhachemum, qui eius ripas utrimque colligat, « abluit. et inde, neglecto priori nomine, Abisus adpellatus .... in mare illabitur » cfr. s. « Elorus « fluvius .... Abisus hodie vulgo dictus ».

(3) Heisterbergk, *Fragen d. ält. Gesch. Sicil.* p. 21 sgg. Anche oggi i fiumi siciliani di questa regione si intitolano dalla città vicina, ad es. Fiume di Noto, Fiume di Ragusa, Fiume di Scicli. I nomi di Assinaro, Irmino, che figurano nelle carte geografiche moderne sono di origine letteraria.

(4) v. Plin. N. H. XXXII. 16. Esso giaceva sul colle oggi detto « Stambagi » ove io raccolsi avanzi di stoviglie elleniche.

clusione che Eloro in origine fosse il nome del fiumicello oggi detto Laufi e che con l'estendersi della città dalle sponde di esso sino alla foce del Tellaro, questo nome sia pure passato ad indicare, in modo particolare, la foce ed il corso inferiore del Tellaro, il quale perdette qui il suo antico nome di Assinaro (1).

Ma che il Tellaro sia proprio l'Assinaro io credo di rendere ancor più probabile e forse certo per il motivo seguente. Allorchè io percorreva la vallata del Tellaro e dei fiumi vicini soleva domandare con insistenza ai contadini, ne' quali m' imbatteva, il nome di tali corsi, ben sapendo quanto poco ci sia da fidarsi, per questa parte, delle carte dello Stato Maggiore italiano. E mentre dai contadini del territorio di Modica mi sentiva sempre ripetere che l'Eloro si chiamava " u Teddaru „ da quelli di Noto, che sono i più vicini al fiume, udii costantemente la forma " Atiddaru „. Questo nome mi fece nascere il sospetto, che " Atiddaru „ sia stato malamente interpretato, come " a Teddaru „ il Tellaro, dai geografi e cartografi, i quali parimente si ingannarono quando il nome del fiume calabrese Lamato, l'antico Lametos, detto oggi anche fiume di S. Ippolito, trascrissero così: " l'Amato „ forma, che figura, pur troppo, in molte carte eccellenti per altri lati (2). A me parve evidente che " Atiddaru „ fosse la forma siciliana equivalente all'Ἀσσίναρος di Tucidide, ed avendo in seguito riscontrata l'opera del Fazello, l. c., vidi con mia grande allegrezza che il dotto scrittore siciliano chiamava il fiume " Attellarus „ nome che dovremo omai restituirgli nelle carte geografiche (3).

(1) Solo ammettendo che l'Elorus in principio non fosse che il nome del Laufi si spiega l' « undae clamosus Holorus » di Silio Italico, XIV. v. 269 v. Fazello, *l. c.;* Cluver. *Sic. Ant.*, p. 185 sq. Nelle carte dello Stato Maggiore italiano il Laufi è detto Elaro, nome che è evidentemente di origine letteraria. Certo questo nome è ignoto a quelli del paese come mi scrive un mio egregio amico il Prof. Mattia Di Martino di Noto, il quale mi fa sapere che questo corso è comunemente detto « Ciumistieddu (fiumicello) di Laufi ».

(2) Il fiume Lamato nella forma ionica Λάμητος era già noto ad Ecateo. v. fr. 40 in M. *F. H. G.* I. p. 3. Così è a deplorare che nella bella carta ridotta dello Stato Maggiore italiano, pubblicata sotto la direzione del Kiepert, la Falconara, che del resto dai contadini è oggi detta il Fiume di Noto, sia addirittura chiamata « l'Asinaro ».

(3) Ecco la nota che mi comunicò un mio dotto amico, il Prof. Gh. Fumi, allora mio collega all' Università di Palermo « Ασσίνᾱρος ha l'aria dorica e parrebbe voler dire corso di fango (ἄσις

Se pertanto l'Assinaro è l'Eloro resta a ricercare come mai mentre l' Eloro è ricordato in tutti i tempi dagli scrittori antichi, da Erodoto a Vergilio, quando si parla del fiume, sulle cui sponde avvenne la strage degli Ateniesi, lo si ricordi esclusivamente con il nome di Assinaro.

Ma anche di questo fatto la spiegazione non è molto difficile. La battaglia ed il nome di Assinaro sono ricordati, oltre che da Tucidide, da Diodoro, da Plutarco e da Pausania. Diodoro ebbe qui presenti varî storici, fra essi Tucidide; Plutarco consultò Tucidide e Filisto (1); Pausania, sia pure indirettamente, per mezzo ad es. di Polemone, ebbe presente Filisto, il noto imitatore di Tucidide (2). In una parola il più antico ed il più autorevole storico di questa guerra venne consultato da tutti gli scrittori posteriori, compresi i Sicelioti. Ora dacchè Tucidide aveva chiamato Assinaro e non Eloro, nome che gli doveva pure essere noto (cf. ὁδὸς 'Ελωρινή) il fiume in cui era avvenuta la celebre strage degli Ateniesi, tutti i suoi successori riprodussero da lui questo nome, sia che essi sapessero o no che il fiume si chiamava anche Eloro.

« v. *Il.* XXI. v. 321, forse da ἀσσι = ἀσ-τι — : νᾶρο — è tema che si riconnette colla rad. snā e con « νῆσος ecc.). Può credersi che la lezione Tucididea sia più genuina (*) e che σσ sia stato pronun- « ziato interdentale, onde poi ττ. Lo scambiò di *n* in *l* e di questo in *d* (sicilianamente *ḍ* e *ḍḍ*) è « ovvio. Cosicchè non è da dubitare che il notigiano rustico *Atiddàru* (il moticano muta in articolo « il primo *a* atono) sia tal quale è colla consueta accettazione della lunga (νᾶ) l'antico 'Ασσίναρος ».

(1) Sulle relazioni che vi sono tra il racconto di Diodoro e di Plutarco rispetto a quello di Tucidide v. le diligenti osservazioni dell' Holm, *Gesch. Sicil.* II. p. 341 sgg. e particolarmente per il nostro caso v. p. 354 sgg.

(2) Che Pausania ripeta dati di Filisto, secondo tutte le probabilità indirettamente, dove parla di cose siciliane, si scorge dall' esame dei luoghi I. 13. 9.; V. 23. 6. e nel passo I. 29. 12. ove parla proprio degli avvenimenti di questa guerra e precisamente della resa di Demostene e di Nicia cf. Philist. fr. 46 in M. *F. H. G.* I. p. 189.

(*) Il Fumi si riferisce qui alla forma 'Ασίναρος, che è nei nostri testi di Diodoro (XIII. 19.) di Plutarco (*Nic.* 27) e di Pausania (VII. 16. 5.).

X.

LA FALSA SPEDIZIONE DI AGATOCLE

CONTRO ΦΟΙΝΙΚΗ.

Polieno fra gli stratagemmi di Agatocle racconta anche il seguente: Ἀγαθοκλῆς δισχιλίους στρατιώτας συντεταγμένους ᾔτησε παρὰ Συρακουσίων ὡς διαβησόμενος ἐς τὴν Φοινίκην, φάσκων τῶν ἐκεῖ τινὰς προδιδόντας μετὰ σπουδῆς αὐτὸν καλεῖν. Πιστεύσαντες ἔδωκαν οἱ Συρακούσιοι. ὁ δὲ λαβὼν τοὺς στρατιώτας Φοίνιξι μὲν μακρὰν χαίρειν ἔφη, ὁρμήσας δὲ ἐπὶ τοὺς συμμάχους τὰ περὶ τὴν Ταυρομενῖτιν φρούρια κατέσκαφεν. V. 3. 6.

A quanto pare Polieno intende parlare di una spedizione marittima di Agatocle contro i Φοίνικες; ma il Droysen osserva che qui sembra non si tratti nè della Fenicia nè della isoletta Fenicusa, una delle Eolie, bensì di Φοινίκη, la città epirota posta di fronte a Corcira. L' illustre storico riconnette quindi questo fatto alla spedizione, che Agatocle fece a Corcira nel 300 a. C. allorchè vinse i Macedoni comandati da Cassandro (v. Diod. XXI. 2) (1). Contro questa ipotesi, che fu accolta anche dall' Holm (2), si esprime lo Schubert nella sua storia di Agatocle, al quale essa pare insostenibile, "von " anderen Unwahrscheinlichkeiten ganz abgesehen, einfach auch schon aus " grammatischen Gründen . . . . denn ein Städtenamen Φοινίκη dürfte hier " nich den Artikel bei sich haben, und die Bewohner einer Stadt Φοινίκη " hätten nie den Namen Φοίνικες führen können. Wahrscheinlich hat Polyaen " in seiner Quelle gefunden, dass Agathocles von einem Kriegszuge gegen

---

(1) DROYSEN, *Histoire de l' Hellenisme* vers. Bouché-Leclercq. (Paris 1883) II. p. 532 n. 1a.

(2) v. *Gesch. Sicil.* II. p. 479.

" die Φοίνικες d. h. Karthager, gesprochen hahe, und sich dann nach διαβη-
" σόμενος aus Φοίνικες den Ländernamen in der Eile falsch construirt " ([1]).

Che il Droysen non abbia colpito nel segno credo anche io, ma non tanto per le ragioni esposte dallo Schubert, quanto per considerazioni d'indole storica. Dal momento che lo stesso Schubert si vede obbligato ad ammettere che Polieno non abbia ripetuto fedelmente il testo e che abbia creata la forma Φοινίκη, non vedo perchè non si possa pensare a qualche altro errore di questo genere: per es. che l'autore degli stratagemmi ed abbia confusa Φοινίκη città epirotica con la regione asiatica, e messo di suo la parola Φοίνικες. Ma che qui realmente non si parli della città epirotica apparirà chiaro a chiunque consideri che Agatocle, ormai *re*, arbitro assoluto dei destini di Siracusa, signore di metà della Sicilia, dopo la spedizione africana, quando intraprendeva la guerra contro le popolazioni della Magna Grecia e contro Corcira e disponeva di fiorenti eserciti composti in buona parte di mercenari (cui poteva arruolare a suo piacere a seconda della pecunia, di cui disponeva o che prometteva ([2])) e non aveva proprio bisogno di ricorrere a pretesti per chiedere ai Siracusani 2 mila soldati e di celare il vero nemico, che si proponeva assalire.

È evidente, ed è strano che ciò sia sfuggito agli storici di questo principe, che la notizia di Polieno si riferisce invece a quel periodo della vita di lui, che o precede o che di poco è posteriore al suo innalzamento a στρατηγός (317 a C.) a quel tempo infine, in cui egli non era ancora assoluto padrone della vita e delle sostanze dei Siracusani (v. Diod. XIX. 5. sq.).

L'ipotesi dello Schubert, che qui si accenni ad una spedizione contro i Φοίνικες ossia contro i Cartaginesi, pare a prima vista, assai probabile; tuttavia le parole φάσκων τῶν ἐκεῖ τινὰς προδιδόντας μετὰ σπουδῆς αὐτὸν καλεῖν, mostrano assai chiaramente che nella fonte di Polieno si faceva menzione non di una regione o di Φοίνικες, bensì di una città o fortezza che Agatocle diceva che gli verrebbe consegnata dai traditori.

A me sembra che la soluzione del nostro quesito sia del tutto e da

---

([1]) *Gesch. d. Agath.* (Breslau 1887) p. 200 sg.

([2]) v. Diod. XXI. 2. 2. 3.

ogni lato appianata, se ammetteremo che Polieno, nella sua fonte, trovasse detto che Agatocle finse di essere stato chiamato dai traditori della città marittima di Φοῖνιξ, che, come risulta dal confronto di Appiano con gli Itinerarî, era posta non lungi dal capo Kokkynos, ed a circa 30 chilometri a nord di Tauromenio, contro le cui fortezze, come si ricava da questa narrazione, era in realtà diretto l'attacco di Agatocle (1). Lo scambio tra Φοῖνιξ e Φοίνικες è assai facile a spiegarsi, e si comprende come una volta avvenuto e frainteso, quindi il significato della parola e del racconto storico, sia sorta la menzione di una spedizione agatoclea contro τὴν Φοινίκην (2). Se però questo errore sia da addebitarsi a Polieno, ovvero se nella sua fonte diretta questo fosse di già commesso, nè posso nè voglio decidere. Si potrebbero fare al proposito varie ipotesi tutte probabili, nessuna certa.

Reputo affatto ozioso insistere nel far notare come l'ipotesi, che qui si menzioni Φοῖνιξ la città vicina a Tauromenio, si presenti a prima vista assai probabile, e sia per lo meno, anche dal punto di vista storico e geografico, migliore delle altre sopra accennate; preferirei invece di stabilire i termini cronologici, in cui avvenne la spedizione contro il territorio tauromenitano, e perchè Agatocle nascondesse il fine reale, al quale mirava. Ma il *terminus ante quem* non è possibile fissare per mancanza di dati; a noi è dato solo notare come Agatocle, a testimonianza di Diodoro, dopo che per essere cacciato da Siracusa Sosistrato potè ivi far ritorno, ποτὲ μὲν ἰδιώτης ὤν, πότε δὲ ἐφ' ἡγεμονίας τεταγμένος cercò ogni occasione di fare qualche impresa e di mostrare, come ad es. davanti le mura di Gela, le sue capacità strategiche (v. Diod. XIX. 4.). Ciò avveniva dopo che Agatocle ed aveva tentato di impadronirsi di Crotone e di Taranto ed aveva aiutati i Reggini assediati da Eraclide e da Sosistrato, e prima del ritorno di questo tirannello a Siracusa. Se si mettessero in rapporto gli aiuti, che Siracusa mandò a Crotone, ed i servigî più o meno disinteressati, che Agatocle rese alle città della Magna

(1) Che la Φοῖνιξ di Appiano (*B. C.* V, 110) sia la stessa cosa della Palma o Tamaricium degli Itinerarî, hanno notato prima il Corcia, *Storia d. due Sicilie* (Napoli 1852) IV. p. 88. poi l' Holm, *Beiträge zur Berichtigung der Karte des alten Siciliens* (Lubeck 1866) progr. p. 11.

(2) Certo nella fonte primaria non èrano ricordati i Φοίνικες come abitanti di Φοῖνιξ; l'etnico secondo la regola di analogia siceliota che è messa in rilievo anche da Stefano Bizantino (v. ad v. Ἀβακαῖνον) doveva essere Φοινικῖνος,

Grecia, con la spedizione, che Alessandro il Molosso fece pure a favore di queste città contro i Brezzi ed i Lucani (335-331 a. C. circa) si verrebbe al resultato che Agatocle (nato il 361 a. C.) (1) esercitò talvolta l'ufficio di stratego verso il 330, ossia quando aveva circa 30 anni. Ma mancano i dati necessarî a stabilire cronologicamente i rapporti di Siracusa verso quelle città e a verificare ciò che solo è dato intuire, ossia se vi fu qualche relazione tra gli aiuti inviati da Siracusa a Crotone e la spedizione di Alessandro il Molosso. Ad ogni modo noi verremmo sempre a risultati molto indeterminati. Può darsi del resto che i Siracusani abbiano combattuto in favore della città della Magna Grecia, dopo che alla battaglia di Pandosia perì Alessandro il Molosso (331 a. C. circa)].

A conclusioni meno vaghe ci condurrebbe il dato di Eusebio (versione di Ieronimo) che all' Ol. 114. 2. = a 323 a. C., dice; " Agathocles Syracusis " tyrannidem exercet " (2). Noi sappiamo da Diodoro che Agatocle riuscì ad insignorirsi di Siracusa nel 317 a C. (XIX. 5.). Può darsi che Ieronimo e Sincello s' ingannino e che qui ad es. vi siano dei soliti errori materiali di cifra fra CXIV. II. e CXV. IIII; ma non è escluso del tutto il caso che Ieronimo indichi qui la data in cui ad Agatocle, sia pure per poco e con poteri non nettamente costituiti, venne fatto per una prima volta di insignorirsi della pubblica cosa (3).

Cacciato da Sosistrato, Agatocle riparò a Morganzio, ma poco dopo, con il consenso del duce cartaginese Amilcare, riusciva a ritornare a Siracusa ed a farvisi riconoscere come stratego del nuovo governo democratico (verso il 317, v. Diod. XIX. 5. Just. XXII. 2). Ma nemmeno allora egli potè considerarsi signore assoluto in causa della potenza degli ottimati, e per riuscire ad avere un esercito fedele e pronto ad eseguire qualunque suo ordine, egli celò ai cittadini i suoi disegni e dette loro ad intendere che ad Erbita, una città posta nelle regioni centrali dell'Isola i ribelli radunavano forze, finse di fare contro di essi una spedizione (προσποιηθεὶς στρατεύειν ἐπὶ τὴν Ἔρβιταν)

(1) V. Diod. XXI. 16. 5. cfr. Schubert *op. cit.* p. 33.

(2) Eus. ed. Schoene II. p. 117. Questo dato non è nemmeno discusso dall' Holm e dallo Schubert.

(3) V. Just. XXII 1. « Bis occupare imperium Syracusarum voluit, bis in exilium actus est » sul significato di queste parole v. Schubert, *op. cit.* p. 44.

e nel fatto da Morganzio e dalle altre città a lui alleate ed amiche raccolse quei soldati, che, ad un suo cenno, uccisero i cittadini o perchè ricchi o perchè avversi al governo assoluto di lui (Diod. XIX. 9. sq. Polyaen. V. 3. 7; 8. Just. XXII. 2.).

Ora Agatocle era veramente signore di Siracusa e non avendo più da render conto a nessuno dell'opera sua incominciò ad assaltare a viso aperto le città vicine amiche o nemiche e perfino quelle, che confidavano nell'alleanza cartaginese (Diod. XIX. 9; 65 sq. Just. XXII. 3.).

Il contegno di Agatocle a proposito della spedizione contro Erbita, ricorda vivamente quello, che pure allora o per il passato aveva tenuto a proposito di Tauromenio, la quale, seppure per effetto del trattato del 314 a. C. non riconobbe la sua dominazione (v. Diod. XIX. 72.), cadde certo in suo potere al pari di Messana nel 312 (v. Diod. XIX. 102).

L'assalto della fortezza del territorio tauromenitano fu fatto per mare, e ciò si spiega se si tien conto della posizione geografica e strategica di Tauromenio; d'altra parte a proposito di Messana e di Mile ci sono attestati simili improvvisi assalti marittimi da parte di Agatocle (v. Diod. XIX. 65.). Perchè egli celasse che i suoi attacchi erano diretti a Tauromenio è detto dallo stesso Polieno: i Tauromenitani erano σύμμαχοι. Allorquando il corinzio Timoleonte, superati gli ostacoli frapposti dai Cartaginesi, riuscì a pôr piede sulle coste siciliane, fu Andromaco, il padre dello storico Timeo, che lo accolse a Tauromenio, da lui novellamente fondata; e di lì movendo i primi passi Timoleonte riuscì a liberare Siracusa dai Romani. Andromaco, dice Diodoro, (o diremo meglio Timeo) aiutò l'impresa di Timoleonte perchè διὰ παντὸς πεφρονηκὼς τὰ τῶν Συρακουσίων. (XVI. 68. a. 345 a. C.). I buoni rapporti fra le due città duravano adunque ancora qualche decennio dopo. Del che la ragione, se non m'inganno, è da cercarsi nella origine degli abitatori di Tauromenio.

Tolta ai Siculi e diventata colonia Siracusana per opera di Dionisio I (Diod. XIV. 96; cfr. 59; 86. a. 396 a. C.) Tauromenio, stando a Diodoro, per opera di Andromaco accolse gli antichi Nassî, cui Dionisio I aveva cacciati dalla patria (XVI. 7. a. 358 a C.). Ma come mai Andromaco, che costituiva una città con l'avanzo degli antichi Nassî, poteva favorire cordialmente Siracusa di cui la calcidica Nasso era sempre stata feroce nemica?

Diodoro, e noi non ce ne meravigliamo, non reputa necessario spiegare questa contradizione.

Se si considera che già nelle più antiche monete di Tauromenio, in quelle, che sono contemporanee di Andromaco vi sono le leggende doriche ΑΡΧΑΓΕΤΑΣ e ΤΑΥΡΟΜΕΝΙΤΑΝ (1) e che la lingua ufficiale nelle epigrafi è pur dorica (2), se terremo presente che non solo Andromaco è amico di Siracusa, ma che suo figlio Timeo, il celebre storico, è detto Συρακόσιος dal siciliano Diodoro (XVI. 16. 5.) verremo forse indotti a concludere non solo che il fondo della popolazione di Tauromenio era dorico, ciò che naturalmente era di già stato osservato, ma che essa veniva fondata da Siracusani dissidenti dalla politica dei Dionisii. Andromaco infatti fondò, o diremo meglio, ricostituì Tauromenio nel 358 a. C. allorchè incominciò la rivoluzione, che dovea por termine alla tirannide del secondo Dionisio (3). E se abbiamo colpito nel segno e se è vero che Tauromenio fosse una propagine di Siracusa, comprenderemo meglio perchè i Romani ad Ierone II, oltre al possesso di Acre, di Neto, di Eloro, di Megara, di Leontini, che circondavano Siracusa e che da secoli erano state da lei conquistate, accordassero anche quello di Tauromenio, nonostante che fra questa ed il territorio di Ierone vi fosse e Catane e la provincia romana, e che la posizione strategica di Tauromenio dovesse consigliare i Romani a non permettere che altri ne fosse signore (4).

(1) v. Head, *op. cit.* p. 165.

(2) v. a titolo di es. *Inscr. Gr. Sic. et Ital.* n. 434: ὁ δᾶμος τῶν Ταυρομενιτᾶν κτλ.

(3) L'Holm *Gesch. Sicil.* II. p. 438 pensa che Tauromenio fosse abitata da una popolazione mista di dori e di ioni (fra i quali anche gli Zanclei, v. s. in questa mem. p. 61 n. 1.) e si servisse ufficialmente del dialetto dorico « weil als die Stadt entstand, der Einfluss von Syrakus in Sicilien überwog ».

(4) v. Diod. XXIII. 4. 1; cfr. Athen. V. 208. f.

ANNALI

DELLE

UNIVERSITÀ TOSCANE

TOMO DICIANNOVESIMO

— *Proprietà Letteraria.* —

ANNALI

DELLE

UNIVERSITÀ TOSCANE

PARTE SECONDA

SCIENZE COSMOLOGICHE

TOMO DICIANNOVESIMO

PISA
TIPOGRAFIA T. NISTRI E C.
1893

Dott. RODOLFO BETTAZZI

PROFESSORE NEL REGIO LICEO GALILEI DI PISA

TEORIA DELLE GRANDEZZE

Opera premiata dalla R. Accademia dei Lincei

AL CHIARISSIMO

PROF. RICCARDO DE PAOLIS

CON RIVERENZA DI DISCEPOLO

CON AFFETTO D'AMICO

DEDICA GRATISSIMO L'AUTORE

INDICE

APPENDICE

PREFAZIONE

La mia " TEORIA DELLE GRANDEZZE *" è, senza nessun cambiamento, quella stessa che presentai alla R. Accademia dei Lincei nell' anno 1888, concorrendo ai premi di Matematica concessi dal Ministero della Pubblica Istruzione. In seguito al giudizio, dato nel dicembre del decorso anno 1889, ottenni uno di tali premi, e mi venne l' obbligo, per le condizioni del concorso, di pubblicare il mio lavoro. Col darlo alle stampe adempio dunque ad un impegno assunto, ed intanto offro ai cultori delle scienze matematiche, e particolarmente ai miei colleghi nell' insegnamento secondario, un saggio di un ramo di studi che da qualche tempo va prendendo largo sviluppo. Del quale sviluppo credo sia da rallegrarsi, poichè per esso acquistano sempre più ampiezza e solidità quei concetti fondamentali su cui poggia l' edifizio dell' intera Matematica, e dai quali, a mio credere, ripete principalmente la sua importanza lo studio di questa disciplina nelle scuole secondarie.*

La pochezza delle mie forze valga a scusare i difetti del mio lavoro, certamente non pochi nè lievi: interpretando io l' onorificenza che ad esso è toccata più come un benevolo incoraggiamento per la scelta del tema, che come un premio per il modo con cui questo è stato svolto. Ma l' importanza dell' argomento fa sì, che io mi riterrò lieto se la lettura di queste pagine invoglierà altri a studiarlo con maggiore ingegno e maggior lena di quello che io abbia potuto fare.

Al Prof. Riccardo De Paolis dell' Università di Pisa per i suoi preziosi consigli ed incoraggiamenti, ed al Prof. Giulio Lazzeri dell' Accademia Navale di Livorno per l' aiuto prestato nella revisione di una parte delle stampe, porgo qui ringraziamenti sinceri.

Pisa, Settembre 1890.

RODOLFO BETTAZZI.

PARTE PRIMA

LE GRANDEZZE E LE CLASSI

CAPITOLO I.

Le grandezze.

Concetto di Grandezza. — 1. Lo studio che deve occuparci è quello delle grandezze. Incominciamo collo stabilire nettamente il loro concetto.

Gli enti che studia una scienza devono essere in essa ben definiti, almeno per quelle proprietà cui si ha riguardo; o meglio (per essere più esatti) devono essere enti ideali, ai quali si attribuiscono le sole proprietà cui si deve aver riguardo; e ciò, o avendo cura che queste proprietà somiglino quelle di qualche oggetto del mondo reale, se i nostri enti hanno origine dall'osservazione del mondo esteriore e devono servire allo studio di esso (per es: gli ordinari enti geometrici) o stabilendole in altro modo qualunque, conforme a scopi speciali, se sono introdotti mediante considerazioni che non riguardino, almeno direttamente, gli oggetti del mondo reale.

In un modo o nell'altro, simili oggetti essendo sempre ideali e riducendosi quindi a puri concetti, le proprietà loro sono espresse da contemporaneità di essi concetti con altri: ed essendo questa contemporaneità sempre possibile qualunque siano questi concetti, purchè non contradittori, ne viene che le proprietà che si possono attribuire agli enti sono del tutto arbitrarie, colla sola condizione che non sieno contradittorie. Simili proprietà costituiscono i *postulati;* e l'esistenza degli enti stessi, dipendendo dal nostro arbitrio, è anch'essa un postulato.

2. La contemporaneità del concetto espresso dalle parole " Esiste un ente „ con altri concetti che lo riguardano, costituisce la definizione di quel-

l'ente. Ma le proprietà che lo distinguono possono essere di due specie; possono cioè riferirsi all'ente in sè o ad alcune relazioni di esso con enti già introdotti, oppure possono esprimere relazioni fra due o più enti, tutti della categoria di quelli da definirsi. La scienza di cui ci occupiamo ha per scopò principalmente il confronto dei suoi enti; onde le proprietà di cui questi devono supporsi dotati devono esprimere relazioni reciproche. Gli enti nella nostra scienza saranno quindi ben definiti quando queste relazioni sieno ben definite.

Le grandezze (nel loro concetto più generale) devono esser quindi enti di tal natura; e per il nostro studio saranno completamente introdotte quando, ammessa la loro esistenza, sieno semplicemente definite quelle reciproche relazioni.

3. La definizione di grandezza sarà da noi data così: " *Grandezza* è " ognuno degli enti di una certa categoria, di due qualunque dei quali può " dirsi se sono eguali o disuguali „ (1). O in altre parole: " Se, senza attribuire " nessun significato speciale alle parole *uguale* e *disuguale*, data una categoria " di enti possono stabilirsi due fatti l'uno dei quali si indica col dire che due " enti sono eguali, l'altro col dire che non lo sono, cioè che sono disuguali, " e l'un caso esclude di necessità l'altro, e avviene necessariamente uno di " questi fatti, talchè presi due di quegli enti sieno o uguali o disuguali, di- " remo *grandezza* ogni ente di quella categoria „.

Circa il caso in cui quegli enti debbano dirsi uguali o disuguali, non si richiede niente in quella definizione; i concetti possono essere svariatissimi; e due enti che in un certo ordine di idee si dicono uguali, possono dirsi disuguali in un certo altro. Di più non è da credersi che alle parole uguale e disuguale si debba di necessità attribuire il significato che si suol dar loro in pratica e nell'uso comune; basta che le relazioni fra gli enti sieno messe in chiaro in modo da potere senza ambiguità riconoscere che avviene l'uno o l'altro dei due casi, uno dei quali si esprime colle parole " due enti sono uguali „ il secondo colle altre " due enti son disuguali „. Per altro, per avere risultati di qualche interesse, intendiamo limitata questa arbitrarietà, in modo che l'uguaglianza segua alcune leggi, che diremo le sue leggi *ca-*

(1) GRASSMANN. *Lehrbuck der Aritmetik.*

ratteristiche; e che si verificano nell'ordinaria uguaglianza (o equivalenza). Supporremo cioè che se A, B, C,... sono alcuni dei nostri enti, ed A è uguale a B, sia anche B uguale ad A; e se A è uguale a B e B è uguale a C, sia A uguale a C.

Per indicare l'uguaglianza useremo il simbolo $=$, e per la disuguaglianza l'altro $\lesseqgtr$. Possiamo quindi dire che, date due grandezze A e B di una medesima categoria, deve essere necessariamente

(1) o $A = B$ o $A \lesseqgtr B$,

e solo uno di questi casi; e

(2) se $A = B$, dev'essere $B = A$,

(3) se $A = B$, $B = C$, dev'essere $A = C$.

Qualunque concetto che soddisfi a queste condizioni, sarà per noi un concetto d'uguaglianza bene stabilito.

È chiaro che dalle condizioni poste discende subito che:

(4) se $A = B$, $B \lesseqgtr C$ sarà $A \lesseqgtr C$,

(5) se $A \lesseqgtr B$, $B = C$ sarà $A \lesseqgtr C$.

4. Dalla definizione data di grandezza si vede che per dare ad un ente il nome di grandezza non è già necessario definire l'ente in sè, ma basta indicare quando può dirsi eguale o diseguale ad un altro [1].

P. es. date due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$, che per x tendente a zero tendano al limite zero, e il cui quoziente per x tendente a zero abbia un limite, se nel caso in cui questo limite è finito e diverso da zero si dice che le due funzioni hanno eguali ordini d'infinitesimo, e nel caso in cui quel limite è zero o infinito che hanno ordini d'infinitesimo diseguali, non si viene con questo a dire che cosa s'intende per ordine d'infinitesimo; ma siamo in grado di giudicare quando accade quel fatto che si indica colle parole "gli ordini d'infinitesimo sono eguali" o l'altro "gli ordini sono diseguali"; e soddisfacendo questa uguaglianza alle accennate condizioni, ciò basta per poter considerare come grandezza un ente da ammettersi col nome di *ordine d'infinitesimo*, il quale viene quindi introdotto mediante il postulato che ne ammette l'esistenza e mediante relazioni fra esso e i suoi consimili.

---

(1) Soltanto come esempio, del resto non indispensabile, citiamo grandezze dipendenti dal concetto di numero, benchè questo a tal punto non sia ancora noto.

E parimente se, ammesso il concetto di figura invariabile, si dice coppia di punti (o di rette) la figura formata da un sistema di due punti (o di due rette) invariabilmente collegati, ed il fatto che due coppie di punti (o di rette) possono coincidere o no esprimendosi colle parole " due segmenti (o due angoli) sono uguali oppure disuguali „ si viene, senza averlo definito, a collegare ad ogni coppia di punti (o di rette) un ente; e di due di questi enti è definita l'uguaglianza e la disuguaglianza. Questo ente è per la teoria delle grandezze sufficientemente definito e può dirsi *segmento* (o *angolo*). Esso poi, quanto ai resultati, può farsi coincidere con quello che col medesimo nome s'introduce in geometria con definizione diretta; e i segmenti (o gli angoli) possono studiarsi anche ricorrendo alla nostra definizione. Questo modo di trattazione fa anzi posare la geometria su più larghe basi e può forse servire ad evitare certe definizioni che danno luogo a difficoltà ed obiezioni (per es: la definizione dell'angolo).

E ancora, per dare un altro esempio, si suol dire che due avvenimenti si compiono in tempi uguali o disuguali, secondochè facendoli incominciare contemporaneamente, terminano anche contemporaneamente o no; uno dei quali casi deve necessariamente accadere. Talchè, senza aver definito affatto che cosa è il tempo, si giunge a collegare ad ogni avvenimento un ente da dirsi tempo, allo scopo di giungere ad esprimere le condizioni di durata di quell'avvenimento di fronte ad un altro. L'ente *tempo,* di cui solo è definita l'uguaglianza o la disuguaglianza, è così legittimamente introdotto e per la nostra teoria ben definito.

Si può anzi dire che questo modo di procedere è quello che, più generalmente e senza che lo notiamo, suole naturalmente farci giungere ad acquistare certi concetti, per es. quelli di spazio, di tempo, ecc., i quali non si possono avere *a priori.*

In questa teoria generale delle grandezze non ci occuperemo quindi del modo con cui ogni oggetto è definito di per sè; e ci basterà di avere una definizione chiara di quando a un certo nome si debbono far seguire le parole " uguale ad un altro „ e quando quelle " disuguale ad un altro „; a quel nome collegheremo un ente, il quale sarà così per noi ben definito. Se anche un ente è definito da per sè, esigeremo sempre che sia data la definizione dell'uguaglianza e della disuguaglianza ad esso relativa.

Questo modo di introduzione degli enti per studiarli come grandezze, sebbene vada oggigiorno acquistando importanza, non è certo nuovo. P. es. Euclide esprime il fatto che fra le grandezze A, B, C, D vi è o no proporzione, dicendo che sono uguali o no i rapporti di A a B e di C a D, e così introduce gli enti *rapporti* definendone solo l'uguaglianza e la disuguaglianza. Il concetto dell'ente tempo è forse sorto sempre spontaneo ad ogni uomo nel modo che abbiamo detto. E così può dirsi di altri concetti.

L'operazione S. — 5. Diremo in generale *operazione* il passaggio da un certo gruppo di enti ad un certo altro, ossia il collegamento di un certo numero di enti ben definiti (da dirsi *resultati*) ad un gruppo di enti dati. Se il gruppo dei resultati consta di un ente solo, diremo che l'operazione cui esso si riferisce è *ad un sol valore.*

Supponiamo di avere un'operazione che indicheremo con S, la quale, eseguita su più oggetti A, B, C, ... L di una certa categoria, conduca ad un unico oggetto M. Scriveremo:

$$S(A, B, C, \dots L) = M$$

Evidentemente, finchè nella definizione non si dica altro, le operazioni

$$S(A, B, C, \dots L), \quad S(B, A, C, \dots L), \quad S(L, A, \dots B)$$

sono operazioni differenti, essendo eseguite sui medesimi oggetti presi peraltro in ordine differente. Ma se tutte queste operazioni conducono a resultati da dirsi eguali, diremo che l'operazione S gode la proprietà *commutativa.* Parimente sono in generale differenti i resultati delle operazioni

$$S(A, B, C, \dots L), \quad S\Big(S(A, B, C), \dots L\Big), \quad S\Big(S(A, B), S(C, D), \dots L\Big) \text{ ecc.;}$$

ma se questi sono uguali in qualunque modo si aggruppino i varii oggetti, diremo che l'operazione S gode la proprietà *associativa.*

6. È utile notare a questo punto che talora, data una categoria di oggetti senza avere in essa definito in tutta la sua generalità il concetto di uguaglianza e di disuguaglianza, si definisce per essi una operazione S e si *assegnano* a questa *a priori* le proprietà ora accennate, quelle cioè di essere commutativa e associativa. Con ciò si viene ad introdurre il concetto d'uguaglianza, o ad ampliare quello già dato, dovendo necessariamente dirsi uguali gli oggetti che sono risultati dell'operazione S eseguita sui medesimi oggetti all'infuori dell'ordine e del loro modo di aggruppamento. Questo è,

per es., il caso dei poligoni e dei poliedri in geometria, dei quali due si dicono *uguali* (equivalenti) se sono somme dei medesimi poligoni o poliedri disposti od aggruppati in modo differente.

7. Noi, in generale, senza curarci se il concetto di uguaglianza sia stato o no stabilito in precedenza, supporremo che, se si deve studiare un'operazione S su una categoria di grandezze, essa goda le proprietà commutativa ed associativa (1). — Supporremo di più che

1° Se $B = C$, sia $S(A, B) = S(A, C)$ e quindi, a causa della commutatività di S, anche $S(B, A) = S(C, A)$„,

2° Se $B \lesseqgtr C$ sia $S(A, B) \lesseqgtr S(A, C)$ e quindi $S(B, A) \lesseqgtr S(C, A)$„.

Queste sono le proprietà che si riscontrano in quelle operazioni che si dicono *addizioni* e che particolarmente abbiamo di mira. In generale, può supporsi che un'operazione S manchi dell'una o dell'altra di queste proprietà, e di essa può farsi anche lo studio (2); ma noi escluderemo tali operazioni: e quando parleremo di una operazione S, intenderemo sempre che essa le goda tutte.

Del resto non faremo nessun'altra ipotesi sull'operazione S: e, scelta una categoria di grandezze, prenderemo per S l'operazione che crederemo più opportuna, e, secondo i diversi casi, anche diversa per i medesimi enti.

8. Poichè si ha, in generale, qualunque sia X,

$$S(X,\ S(A, B, C, .. L)) = S(A, B, C, .. X, ... L)$$

e se $K_1 \lesseqgtr K$ è (§ 7)

$$S\Big(K_1,\ S(A, B, C, .. L)\Big) \lesseqgtr S\Big(K, S(A, B, C, .. L)\Big),$$

sarà (§ 3)

$$(1) \qquad S(A, B, C, \dots K_1, \dots L) \lesseqgtr S(A, B, C, .. K, \dots L),$$

ossia l'operazione S è tale che il suo resultato cambia, cambiando uno (solo) dei suoi enti. Questa proprietà è stata detta da NOTH (3) *dipendenza.*

(1) Propriamente, affinchè valgano in generale queste proprietà, basta ammettere che il principio associativo valga per un'operazione S eseguita su 3 oggetti, e quello commutativo per la S eseguita sopra 2 oggetti, cioè che sia

$$S(A, S(B, C)) = S(S(A, B),\ C) \quad , \quad S(A, B) = S(B, A),$$

(V. HANKEL. *Vorlesungen über die complexen Zahlen,* 1 Theil § 4 — STOLZ. *Vorlesungen über allgemeine Aritmetik,* 1 Theil, III Abschnitt) giacchè allora si dimostra che valgono in generale. Noi, per semplicità, ammetteremo senz'altro di aver verificato che quei due principii valgono in generale.

(2) V. p. es.: HANKEL. Op. cit. 2te Abschnitt. — R. GRASSMANN. *Die Ausdehnung's Lehre ecc.* — SCHRÖDER, *Lehrbuch der Aritmetik.*

(3) NOTH. *Die Aritmetik der Lage.*

Se poi K è una grandezza per la quale, rispetto a qualunque grandezza M, non sia $S(M, K) = M$, si vede subito anche che (§§ 7, 3)

(2) $$S(A, B, .. H, K, L, ..) \gtreqless S(A, B, .. H, L, ...),$$

ossia che il resultato di un'operazione S si altera, sopprimendo uno degli enti su cui si opera, purchè esso non sia un ente K per cui sia $S(M, K) = M$.

Si ha pure che se

(3) $$A = A', \quad B = B', \quad C = C', ... \quad L = L',$$

sarà anche (§§ 7, 3)

(4) $$S(A, B, C, .. L) = S(A', B', C', .. L').$$

Se si ha

$$S(A, B, C, .. L) = M$$

diremo che la grandezza M è *divisa nelle parti componenti* (o semplicemente *nelle parti*) A, B, C, .. L di cui M si dirà *risultante*.

Grandezze multiple e summultiple. — 9. Se una grandezza M è uguale al risultato dell'operazione S eseguita su una medesima grandezza A considerata più volte. cioè se

$$M = S(A, A, A, ...),$$

si dice che M è *multipla* o *moltiplice* di A, ed A si dice a sua volta *summultipla*, *summoltiplice*, o anche *parte aliquota* di M.

Per generalità di linguaggio una grandezza si dice anche multipla o summultipla di sè stessa.

Se due multiple M, N di una stessa grandezza A sono tali che $M = S(N, A)$ diremo che sono due multiple *successive*.

Due grandezze

$$M = S_1(A, A, A, ..) \qquad N = S_2(B, B, B, ..)$$

multiple rispettivamente di altre due grandezze A e B, anche di differenti categorie, (potendo S_1 ed S_2 anche essere due operazioni S con differente significato) si dicono *equimultiple* od *equimoltiplici* di A e B quando ad ogni parte A di M può farsi corrispondere una distinta parte B di N e viceversa. Le A, B si dicono allora *equisummultiple* od *equisummoltiplici* di M, N.

10. Per indicare che la grandezza M è multipla della grandezza A, scriveremo $M = m A$, dove il segno m o qualunque altra lettera non indica in generale che il fatto della moltiplicità. Il simbolo m o qualunque altro del medesimo genere si dirà *simbolo di moltiplicità*. Per distinguere poi le diffe-

renti specie di moltiplicità useremo simboli differenti. Se per indicare la moltiplicità di due grandezze rispetto ad altre due si usa il medesimo simbolo, ciò esprimerà che le due prime grandezze sono equimultiple delle seconde. Così se M ed N sono equimoltiplici di A e B, potremo scrivere:

$$M = pA \quad , \quad N = pB,$$

dove p è un segno che, come m, indica moltiplicità. Si può, volendo, scrivere anche in tal caso:

$$M\,m\,A \;::\; N\,m\,B,$$

dove ora con m si vuole indicare soltanto l' iniziale della parola *multiplo*.

Avendosi due multiple M ed N della medesima grandezza A ed essendo quindi $M = p\,A$, $N = q\,A$, se M ed N sono equimultiple di A, diremo che i simboli p e q sono *uguali* e scriveremo $p=q$; se M ed N non sono equimolteplici di A, ma ad ogni A parte di N corrisponde una distinta A parte di M e non viceversa, talchè M contenga A più volte di quello che la contenga N, diremo che il simbolo p è *maggiore* di q, e q è *minore* di p, e scriveremo $p>q$, $q<p$. Se infine $M = p\,A$ e $N = q\,A$ e si ha una grandezza P tale che $P = S\,(M, N)$, sarà P una multipla di A, cioè $P = r\,A$; diremo che il simbolo r è la *somma* dei simboli p e q, e si porrà $r=p+q=q+p$; e che p è la *differenza* fra r e q, onde scriveremo $p=r-q$, $q=r-p$. Ad una grandezza qualunque considerata come multipla di sè stessa, faremo corrispondere sempre il simbolo di moltiplicità 1. Se quindi $M = p\,A$, la multipla successiva ad M sarà $N = (p+1)\,A$.

Per indicare che $M = m\,A$ scriveremo anche $A = \frac{M}{m}$, col qual simbolo si pone in rilievo che A è summultiplo di M. Se $A = \frac{M}{m}$, $B = \frac{M}{m+1}$, diremo A e B summultiple *successive* di M.

Se $A = \frac{M}{m}$ e si hanno altre due grandezze B ed N tali che A e B sieno equisummoltiplici di M ed N, poichè ciò vuol dire che M ed N sono equimultiple di A e B e quindi, a causa di $M = m\,A$, che $N = m\,B$, si vede subito che dovremo scrivere $B = \frac{N}{m}$ dove m è il medesimo simbolo precedente. In tal caso si potrà anche scrivere

$$A\,s\,m\,N : : B\,s\,m\,N.$$ [1]

L' operazione D e la grandezza 0. — 11. Abbiamo definita l'operazione S e abbiamo supposto che essa sia ad un sol valore, cioè che il resultato di un'operazione S(A, B) sia una sola grandezza o una qualunque di tutte le sue eguali. Se ora, date due grandezze A e C, cerchiamo quella o quelle grandezze B tali che

$$S(A, B) = C,$$

verremo a compiere un'operazione che si dirà l'*operazione inversa* di S e si potrà indicare col simbolo D, talchè scriveremo

(1) $$D(C, A) = B.$$

Per definizione si avrà dunque:

(2) $$D\Big(S(A, B),\ A\Big) = B \qquad \text{o} \qquad S\Big(A, D\,(C, A)\Big) = C.$$

Il resultato dell'operazione D(C, A) si dirà *divergenza* fra C ed A.

12 Dalle proprietà ammesse per l'operazione S ne discendono immediatamente alcune per l'operazione D nei casi in cui questa è possibile, cioè quando esiste il suo resultato. Dalla dipendenza dell'operazione S (§ 8) discende che D è ad un sol valore, giacchè se fosse possibile che con $B \lessgtr B'$ si avesse

$$D(C, A) = B \quad , \quad D(C, A) = B',$$

avremmo anche (§ 11)

$$S(A, B) = C \quad , \quad S(A, B') = C,$$

contro la dipendenza di S.

Anche l'operazione D gode la proprietà della dipendenza; giacchè, supposte possibili le due operazioni D(C, A), D(C′, A) con $C \lessgtr C'$, se i due resultati B, B′ non fossero diseguali, essendo grandezze, dovrebbero essere uguali (§ 3) ed avremmo (§§ 7, 11):

$$S(A, B) = C \quad , \quad S(A, B) = S(A, B') = C'$$

contro l'ipotesi che l'operazione S sia ad un sol valore. Così pure, se sia $A \lessgtr A'$, saranno disuguali le grandezze $D(C, A) = B$, $D(C, A') = B'$, giac-

---

[1] Si riscontrerà una completa analogia fra i simboli di moltiplicità ora introdotti e i numeri interi dell'aritmetica, tale che in seguito ci condurrà a identificare i primi ai secondi. Siamo per altro costretti ad introdurre i simboli di moltiplicità tenendoli distinti dai numeri, perchè non vogliamo ancora ricorrere al concetto di numero che supponiamo completamente ignoto. I nostri simboli di moltiplicità sono evidentemente grandezze (§ 3.)

chè, altrimenti, se fosse $B = B'$ sarebbe $S(B, A) = C$, $S(B, A') = S(B', A') = C$ e quindi $S(B, A) = S(B, A')$ contro l'ipotesi della dipendenza di S.

L'operazione D non godrà della proprietà commutativa, giacchè talora la possibilità di $D(C, A)$ è legata all'impossibilità di $D(A, C)$, o almeno, come vedremo in seguito, se anche sono possibili ambedue le operazioni, i resultati non sono da ritenersi uguali. Della proprietà associativa non è il caso neanche di parlare, non avendo luogo che quando un'operazione è applicata ad almeno tre grandezze.

Dalle proprietà esposte per le due operazioni S e D discendono le altre espresse dalle seguenti formule, di cui tralasciamo per brevità la dimostrazione che è per tutte facilissima [1].

(1) $D\Big(S(A, B), B \Big) = A$

(2) $D\Big(S(A, M), S(B, M) \Big) = D\Big(D(A, M), D(B, M) \Big) = D(A, B)$

(3) $S\Big(D(A, B), C \Big) = D\Big(S(A, C), B \Big)$

(4) $D\Big(D(A, B), C \Big) = D\Big(A, S(B, C) \Big)$

(5) $D\Big(A, D(B, C) \Big) = D\Big(S(A, C), B \Big)$

(6) $S\Big(D(A, B), D(A', B') \Big) = D\Big(S(A, A'), S(B, B') \Big)$

(7) $D\Big(D(A, B), D(A', B') \Big) = D\Big(S(A, B'), S(A', B) \Big)$

(8) da $D(A, B) = D(A', B')$ si deduce $S(A, B') = S(A', B)$ e viceversa da $S(A, B') = S(A', B)$ si deduce $D(A, B) = D(A', B')$

(9) $S\Big(S(A, B), D(A', B') \Big) = S\Big(S(A, A'), D(B, B') \Big)$

Tutte queste proprietà s'intendono valere per il caso in cui le operazioni D indicate nelle formule sieno possibili [2].

---

(1) Cfr. HANKEL. Op. cit. — STOLZ. Op. cit.

(2) Per afferrare il senso delle proprietà precedenti si cambino i simboli S e D rispettivamente negli altri + e —, e si confrontino le formule con quelle che così risultano le quali esprimono proprietà delle ordinarie addizioni e sottrazioni fra i numeri.

13. Data una categoria di grandezze fra due qualunque delle quali si supponga sempre possibile l'operazione S, non si potrà dire in generale che fra due di esse sia possibile l'operazione D. Qualora si supponga che in quella categoria d'oggetti questa operazione D sia sempre possibile, esaminiamo in particolare la grandezza che proviene dall'eseguire l'operazione D fra due grandezze uguali, ossia cerchiamo a che cosa è uguale D (A, A). Indichiamo con O questo resultato. Essendo B un'altra grandezza della medesima categoria, D (B, B) deve rappresentare una grandezza X definita dalla relazione S (B, X) = B. Ma si ha che (§ 12)

$$S\Big(B, D(A, A)\Big) = D\Big(S(B, A),\ A\Big) = B,$$

quindi

$$S\Big(B, D(B, B)\Big) = S\Big(B, X\Big) = B = S\Big(B, D(A, A)\Big)$$

e, per la dipendenza che si suppone nell'operazione S, dovrà essere:

(1) $$D(B, B) = D(A, A) = O \text{ [1]}.$$

La grandezza O (detta da Grassmann *grandezza indifferente*) rappresenta il resultato dell'operazione D eseguita sopra una coppia *qualunque* di grandezze uguali. Potremo dirla la *grandezza modulo* [2] per l'operazione S; e poichè da D (A, A) = O si deduce

(2) $$S(A, O) = A,$$

essa godrà della proprietà che, unita mediante l'operazione S a qualunque grandezza di quella categoria, la lascia inalterata. Questa grandezza deve essere, in quella categoria di grandezze in cui si è definita quell'operazione S, l'unica che goda di questa proprietà, a causa della dipendenza di S; quindi per ogni grandezza $B \lesseqgtr O$ deve essere

(3) $$S(A, B) \lesseqgtr A.$$

14. Se supponiamo che sia

$$S(A, B, \ldots H, K, L, \ldots P) = S(A, B, \ldots H, L, \ldots P),$$

allora, potendo questa uguaglianza per le proprietà stabilite per S (§ 7) scriversi:

$$S\Big(S(A, B, \ldots H, L, \ldots P),\ K\Big) = S(A, B, \ldots H, L, \ldots P),$$

---

[1] R. Grassmann. Op. cit.

[2] Hankel. Op. cit.

dovremo avere (§ 13) $K = 0$: e se $K \lessgtr 0$ l'uguaglianza precedente non è possibile. Ne viene che una resultante di grandezze non può essere eguale a quella che si ottiene dall'operazione S fatta su alcune sole di quelle grandezze, ossia che una grandezza non può essere uguale alla resultante di alcune sole delle sue parti, a meno che la resultante delle parti non considerate sia uguale alla grandezza modulo.

Se vogliano che tralasciando una grandezza K di una resultante si ottenga di nuovo la resultante primitiva, deve considerarsi la grandezza K come uguale alla grandezza modulo O: non volendo far ciò, dovremmo rinunciare in questa categoria di grandezze ai teoremi più fondamentali e caratteristici che valgono per l'operazione S nella generalità delle ordinarie grandezze. Siccome allora, tenendo conto della proprietà associativa di S, si giungerebbe facilmente alla formula

$$S(K, M) = M = S(O, M),$$

dovremmo rinunciare alla dipendenza o alla associatività di S. Finchè quindi, come faremo noi, vorremo mantenere per l'operazione S queste proprietà caratteristiche, avremo che la resultante di alcune parti di una grandezza non è uguale alla grandezza stessa, altro che nel caso che la resultante delle parti soppresse sia eguale ad O.

15. Se in una categoria di grandezze data una grandezza A ne esiste un'altra A', tale che

$$S(A, A') = 0 \qquad \text{cioè} \quad A' = D(O, A),$$

diremo che A' è *opposta* ad A. Se in quella categoria di grandezze fra due qualunque di esse ed in qualunque ordine si può eseguire l'operazione D, esisterà sempre D (O, B), ossia ogni grandezza ammetterà sempre in quella categoria la sua opposta.

Evidentemente, a causa della dipendenza di S, tutte le grandezze opposte ad una medesima sono uguali fra loro. La grandezza modulo è opposta di sè stessa.

Capitolo II.

Le classi di grandezze in generale.

Le classi di grandezze. — 16. Supponiamo ora d'avere una categoria di grandezze per le quali sia definita un'operazione S, che goda, come si è

stabilito per sempre, le proprietà già enunciate (§ 7). Supponiamo che, prese quante si vogliano grandezze di quella categoria, delle quali alcune o tutte possono anche essere uguali, esista sempre in essa una grandezza uguale alla loro resultante. Diremo che quella categoria di enti è una *classe di grandezze rispetto all'operazione* S, o semplicemente una *classe di grandezze.* Evidentemente in una classe di grandezze devono comparire, per definizione, tutte le multiple di una qualunque delle sue grandezze. Siccome anche in una medesima scienza si possono fare diverse classi in modo che gli enti dell'una non compariscano nell'altra, per distinguere questi enti diremo *grandezze omogenee* quelle che appartengono a una medesima classe. L'omogeneità dipende dal genere dell'operazione S: onde due grandezze che possono far parte di una medesima classe rispetto ad una certa operazione S e sono quindi omogenee rispetto ad essa, possono talora non far parte di un'altra classe rispetto ad un'altra operazione S per la quale non sono perciò omogenee. L'omogeneità di due enti è quindi relativa alla classe che si considera.

Sull'operazione S seguitiamo a non fare nessuna ipotesi oltre quelle stabilite in generale, e quindi non le diamo neppure nome speciale, perchè la si possa considerare sotto diversi aspetti secondo le diverse specie di grandezze.

17. Colla definizione data sono ora classi di grandezze: la classe di tutti i segmenti, quella di tutti gli angoli e quella di tutti i diedri, quando l'uguaglianza sia la sovrapponibilità geometrica e l'operazione S l'addizione geometrica; la classe di tutti i poligoni e quella di tutti i poliedri, se l'eguaglianza è l'equivalenza geometrica e l'operazione S l'addizione geomemetrica; la classe degli ordini di infinitesimo quando (senza essere essi definiti come numeri ma come enti a sè, nel modo che si è già detto al § 4) l'uguaglianza si definisce nel modo usato per introdurre gli enti stessi, e per resultante di più ordini d'infinitesimo α, β, γ,.. s'intende l'ordine μ d'infinitesimo della funzione che è il prodotto delle funzioni che hanno per ordini respettivi α, β, γ,..; la classe delle n radici dell'equazione binomia $x^n=1$, quando l'eguaglianza sia quella ordinaria dei numeri e l'operazione S sia l'ordinaria moltiplicazione; la classe formata da un gruppo di sostituzioni permutabili fra loro, per es. dalle potenze di una sostituzione ciclica, quando

per uguaglianza s' intenda l' identità delle sostituzioni e l' operazione S sia la moltiplicazione delle sostituzioni, giacchè la moltiplicazione delle sostituzioni è sempre associativa, e in questo caso è anche commutativa per la supposta permutabilità delle sostituzioni del gruppo ecc.

Gli esempi sopra citati mostrano che le classi di grandezze possono esser composte sia d' un numero infinito che di un numero finito di grandezze; di più che vi sono classi composte di un numero arbitrario p di grandezze, per esempio, le classi delle radici di $x^p = 1$.

Nelle classi geometriche citate, cioè nelle classi di segmenti, di angoli ecc., finchè si prendono le sole ordinarie definizioni geometriche, non vi è grandezza modulo; nella classe degli ordini di infinitesimo la grandezza modulo è l'ordine di infinitesimo di una costante; nella classe delle radici di $x^n = 1$ è la radice 1; nella classe delle sostituzioni di un gruppo è la sostituzione identica ecc.

18. Una grandezza si dirà ora che è *divisibile o decomponibile in parti*, quando sia possibile ottenerla come resultante di grandezze della medesima classe.

19. Per definire una classe di grandezze ci siamo solo riferiti all'operazione S, ma non abbiamo fatto nessuna ipotesi circa la possibilità dell'operazione inversa D. Supporremo sempre per altro d' ora in là che nelle classi di grandezze esista sempre la grandezza modulo 0, talchè saranno sempre possibili almeno le operazioni D (A, A) che hanno la 0 per resultato. Se questa grandezza non esiste già nella classe (come era il caso delle classi geometriche citate) intenderemo di completare la classe coll' aggiungervi una grandezza ideale 0 definita dalle seguenti condizioni:

1° $0 \lesseqgtr A$ essendo A una grandezza qualunque della sua classe,

2° $S(A, 0) = A$, con A pure qualunque, talchè, come si è notato, sarà certamente

$$D(B, B) = D(A, A) = 0.$$

Se nella classe esistono due grandezze opposte A, A′ deve esistere anche la grandezza modulo, giacchè $S(A, A') = 0$, e la resultante di due grandezze della classe deve pur trovarsi nella classe stessa (§ 16).

Classi ad una o più dimensioni. — 20. Supponiamo ora che prese due grandezze disuguali qualunque sia stabilito che cosa voglia dire che una di

esse è la *maggiore* e l'altra *minore.* Alle parole " maggiore „ e " minore „ devesi qui attribuire un significato soltanto in modo simile a quello usato per la parola " uguale „: basta a noi che prese due grandezze A, B disuguali avvenga un fatto ben definito il quale si esprima colla frase " A è minore di B „ o coll'altra " A è maggiore di B „. Useremo i simboli $A<B$, $A>B$ per indicare rispettivamente l'uno o l'altro di questi due casi. I concetti di maggiore e di minore, sono, del pari che quello di uguale, introdotti colla massima generalità e senza nessuna limitazione; intenderemo solo di sottoporli a certe condizioni caratteristiche, che sono quelle che si verificano per gli ordinari concetti di maggiore e di minore, cioè chiederemo che

1° " Se $A>B$ e $A'=A$, sia $A'>B$, e se $B=B$, sia $A>B'$ (e quindi $A'>B'$)„

2° " Se $A>B$, sia $B<A$ „

3° " Se $A=B$, $B>C$, sia $A>C$ „

4° " Se $A>B$, $B>C$, sia $A>C$ „

5° " Se $A>B$, sia $S(A, C) > S(B, C)$ „ (¹).

21. Si abbia una classe di grandezze tale che (intendendo i concetti di maggiore e minore stabiliti come si è detto ora) prese in essa due grandezze disuguali A e B qualunque, una debba esser maggiore e l'altra minore. Ne viene allora (§ 3) che, prese nella classe due grandezze qualunque A e B, deve necessariamente aver luogo uno dei tre casi: $A>B$, $A=B$, $A<B$. (Indicheremo ciò brevemente scrivendo $A \gtreqless B$).

Le classi di questo genere si diranno *classi ad una dimensione.*

22. Quanto alle classi che non sono ad una dimensione, perchè siano tali devono esistere in esse almeno due grandezze disuguali X e Y, per le quali non possa dirsi qual'è la maggiore e quale la minore. Ma se, in generale, diciamo *sottoclasse* di una classe data una classe formata di grandezze tutte

---

(¹) Alcune delle condizioni che noi abbiamo poste come caratteristiche pei concetti di uguale, maggiore, minore, e di operazione S sono talora presentati come assiomi (V. per es. Euclide), quando non è bene stato messo in chiaro che cosa significano le parole uguale, maggiore ec. Così l'assioma d'Euclide: « la parte è minore di tutto » è la condizione $S(B, A)>B$; l'altro « due grandezze uguali ad una terza sono uguali fra loro » è la condizione: da $A=B$, $B=C$ si ha $A=C$. Verità di quel genere non possono mai essere assiomi nel senso più stetto della parola, perchè, o sono condizioni da osservare per cercare definizioni di uguale, maggiore ecc., e in tal caso meglio è dirli postulati, o, se queste definizioni siano già date, sone altrettanti teoremi da esser dimostrati.

appartenenti alla classe data e in cui l' operazione S ed i concetti di uguale, maggiore e minore sono gli stessi di quelli della data classe, può darsi che, se una classe non è ad una dimensione, vi siano in essa delle sottoclassi ad una dimensione, tali che tutte le grandezze della classe siano risultanti di grandezze di una stessa o di diverse fra esse. Diremo in tal caso che la classe data è una classe *complessa* o *a più dimensioni*, e precisamente a tante dimensioni quante sono le sottoclassi ora indicate, che chiameremo *sottoclassi elementari* di essa.

Nelle classi complesse dunque non tutte le grandezze sono confrontabili in modo da poter dire qual'è la maggiore e quale la minore; ma solo si può giudicare se sono uguali o disuguali, tranne per due grandezze di una medesima sottoclasse elementare, delle quali ciascuna è certamente o uguale, o minore, o maggiore all' altra.

Sono classi ad una dimensione, per es., le classi dei segmenti, degli angoli, dei diedri, dei poligoni, dei poliedri, degli ordini d' infinitesimo, dei tempi ecc., quando i concetti di maggiore, minore ed uguale siano stabiliti nei modi ordinari. È invece a due dimensioni la classe i cui enti sono, per es., tutti i segmenti, tutti gli angoli e tutti i gruppi possibili di un angolo e di un segmento, quando l' operazione S fra due segmenti o fra due angoli sia l'ordinaria addizione geometrica, e fra più segmenti e più angoli sia la semplice considerazione simultanea del segmento somma dei segmenti dati e dell'angolo somma degli angoli dati. Questa classe è a due dimensioni, finchè s'intenda di non stabilire, come suol farsi, nessun concetto che permetta, preso un segmento ed un angolo, di dire quale di essi è maggiore e quale minore. Le sottoclassi elementari sono quella dei segmenti e quella degli angoli. Una classe a tre dimensioni è quella dei segmenti dello spazio, quando essi si decompongano nelle loro proiezioni su tre assi qualunque, e si prenda quindi per operazione S quella corrispondente all'ordinaria composizione delle forze, e per uguaglianza l'uguaglianza di grandezza e di direzione. Le tre sottoclassi elementari sono quelle formate dai segmenti nelle direzioni rispettivamente dei tre assi scelti per la decomposizione.

23. Noi volgeremo il nostro studio esclusivamente alle classi ad una dimensione ed a quelle con un numero finito di dimensioni, rigettando quelle con un numero infinito di dimensioni o quelle che non sono affatto ad una

o a più dimensioni. Queste ultime, in cui non si ha in generale il concetto di minore e di maggiore, non godono di proprietà interessanti. Solo vogliamo notare una loro categoria speciale, il cui studio può farsi rientrare in quello delle classi complesse.

Sia una classe che si trasformi in un'altra a più dimensioni, quando ad essa *aggiungiamo* una o più classi che ne divengano sottoclassi elementari, estendendo, se occorre, la definizione dell'operazione S (purchè peraltro per le grandezze già esistenti resti la stessa). Quella classe potrà allora considerarsi come una classe a più dimensioni a cui siano state tolte alcune o tutte le sottoclassi elementari. Ne sia un esempio la classe di tutte le grandezze di cui ciascuna è formata o da un gruppo di un segmento e di un poligono, oppure da un solo segmento; se ad essa aggiungiamo la classe dei poligoni, essa diviene una classe a due dimensioni. E così la classe formata da tutti i gruppi di un segmento, di un angolo e di un ordine d' infinitesimo, diviene a tre dimensioni, quando vi si aggiungano le tre classi dei segmenti, degli angoli, degli ordini d' infinitesimo, che ne divengono le sottoclassi elementari.

Le classi di questo genere potranno dirsi *semicomplesse;* ma il loro studio rientra chiaramente in quello delle classi a più dimensioni, onde potremo limitarci, come si è detto, a studiare le classi ad una dimensione, e class complesse ad un numero finito di dimensioni.

24. Le classi complesse possono trasformarsi in classi ad una dimensione. quando modificando convenientemente, se occorre, i concetti di uguale e di operazione S, si stabilisca il concetto di maggiore o di minore fra due grandezze *qualunque* della classe. Nelle classi, per es., in cui questo concetto si stabilisce ricorrendo alla considerazione dell' operazione S, si capisce come cambiando questa, possano le classi cambiare numero di dimensioni. Ne è un esempio la classe di tutti i segmenti dello spazio, la quale, a tre dimensioni quando l' operazione S è quella corrispondente alla composizione delle forze, diviene ad una dimensione, se nella definizione di uguaglianza di due segmenti si sopprime la condizione dell' uguaglianza di direzione, e per operazione S si considera l' ordinaria addizione geometrica.

Classi ad una dimensione. — 25. Nelle classi ad una dimensione si dimostrano subito vere le seguenti proprietà :

1° " Se $A<B$ e $B=C$, è $A<C$. "

2° " Se $A<B$ e $B<C$, è $A<C$. "

3° " Se $A=B$ e $B<C$, è $A<C$. "

4° " Se $A>B$ e $B=C$, è $A>C$. "

5° " Se $A \gtrless B \gtrless C \gtrless \ldots \gtrless M$ (avendo luogo insieme tutti i segni superiori o tutti i segni inferiori) sarà rispettivamente $A \gtrless M$. "

le cui dimostrazioni, che si appoggiano unicamente sulle proprietà caratteristiche della condizione $A > B$ e sul fatto che per due grandezze A e B deve essere $A \gtreqless B$, si tralasciano per brevità.

Si deducono pure facilmente le altre proprietà:

6° " Secondochè $A \gtreqless B$, è $S\Big(A, C\Big) \gtreqless S\Big(B, C\Big)$. "

e quindi, reciprocamente:

7° " Secondochè $S\Big(A, C\Big) \gtreqless S\Big(B, C\Big)$, è $A \gtreqless B$. "

Di più:

8° " Se $A \gtrless A'$, $B \gtrless B'$ (avendo luogo insieme i segni superiori o gl'inferiori) è rispettivamente $S(A, B) \gtrless S(A', B')$. "

donde:

9° " Se $S(A, B) = S(C, D)$ ed $A \gtreqless C$, sarà rispettivamente $B \lesseqgtr D$. "

Se poi, almeno fra le grandezze particolari delle quali si parla, è possibile l'operazione D inversa di S, si vede che valgono le altre proprietà:

10° " Se $A \gtrless B$ ed $A>M$, $B>M$, si ha rispettivamente $D(A, M) \gtrless D(B, M)$. "

giacchè se, per es., con $A>B$ fosse $D(A, M) \leqq D(B, M)$, sarebbe (§ 25, 6°)

$$S\Big(M, D(A, M)\Big) \leqq S\Big(M, D(B, M)\Big),$$

cioè $\Big($§ 11 (2)$\Big)$ $A \leqq B$, contro l'ipotesi ecc.

11° " Se $A \gtrless B$ ed $A<M$, $B<M$, si ha rispettivamente $D(M, A) \lessgtr D(M, B)$. "

giacche si ha $\Big($§ 12 (3) e (1)$\Big)$

$$S\left(D(M, A), A\right) = M = S\left(D(M, B), B\right),$$

e quindi, essendo, per es., $A > B$, deve essere (§ 25, 9°) $D(M, A) < D(M, B)$ ecc.

12° “ Se $A \gtrless B$ e $D(A, A') = D(B, B')$, deve essere rispettivamente “ $A' \gtrless B'$ (§ 25, 10,° 11°). „

26. Come in generale in tutte le classi (§ 16), così in quelle ad una dimensione, data una multipla qualunque $M = mA$, di A, e data una grandezza qualunque B (anche non omogenea ad A) possiamo sempre costruire una grandezza che di B sia multipla come M lo è di A; basta perciò immaginare di far corrispondere ad ognuna delle grandezze A che sono parti di M una grandezza B, e trovare la risultante di queste grandezze B.

Alla questione se, data $A = \frac{M}{m}$, con m simbolo di moltiplicità qualunque, esista sempre l'equisummultipla di qualunque altra grandezza N, non possiamo per il momento rispondere. Mostreremo in seguito che in certe classi di grandezze tale summultipla esiste sempre.

Per le grandezze multiple e summultiple nelle classi ad una dimensione valgono le seguenti proprietà:

1° “ Se A, B, M, N sono grandezze omogenee, ed $M\,m\,A :: N\,m\,B$, cioè “ $M = pA$, $N = pB$, sarà $M \gtreqless N$ secondochè $A \gtreqless B$. „

giacchè $pA = S(A, A, \ldots A)$, $pB = S(B, B, \ldots B)$ e vale la proprietà del § 20, 5°.

Di qui discende immediatamente il teorema reciproco:

2° “ Se $M\,m\,A :: N\,m\,B$, secondochè $M \gtreqless N$, sarà $A \gtreqless B$. „

3° “ Se si ha:

$$M_1\,m\,A_1 :: M_2\,m\,A_2 :: \ldots.. :: M_n\,m\,A_n,$$

“ sarà anche

$$S(M_1, M_2, \ldots. M_n)\; m\; S(A_1, A_2, \ldots A_n) :: M_r\, m\, A_r. „$$

Infatti, essendo in generale $M_r = S(A_r, A_r, \ldots A_r)$, sarà:

$$S(M_1, M_2, \ldots M_n) = S\left(S(A_1\, A_1, \ldots A_1), S(A_2, A_2, \ldots A_2), \ldots. S(A_n, A_n, \ldots A_n)\right) =$$

$$= S\left(S(A_1, A_2, \ldots A_n), S(A_1, A_2, \ldots A_n), \ldots\ldots\right),$$

ossia questa risultante sarà multipla della risultante S $(A_1, A_2, \dots A_n)$ come una qualunque delle M lo è della corrispondente A. c. d. d.

4. " Se si ha: $P = r\,M$, $Q = r\,N$, con $M = s\,A$, $N = s\,B$,
" sarà

$$P\,m\,A :: Q\,m\,B\text{''}$$

Infatti, essendo per ipotesi

$$P = S\,(M, M, \dots M) \quad , \quad Q = S\,(N, N, \dots N),$$

nelle quali risultanti tante sono le M quante sono le N, ed essendo ancora per ipotesi

$$M = S\,(A, A, \dots A) \quad , \quad N = S\,(B, B, \dots B),$$

dove tante sono le A quante le B, sarà

$$P = S\Big(S(A, A, \dots A), \dots S(A, A, \dots A)\Big), \; Q = S\Big(S(B, B, \dots B), \dots S(B, B, \dots B)\Big),$$

cioè P ed A saranno risultanti rispettivamente di grandezze A e di grandezze B, nelle quali tanto sono le A quante le B, cioè, come si doveva provare,

$$P = t\,A \quad , \quad Q = t\,B.$$

5° " Se $M = p\,A$, $N = p\,B$, e si suppone che esista D (A, B), esisterà
" anche D (M, N), e sarà

$$D\,(M, N) = p\,D\,(A, B).\text{''}$$

E infatti, costruiamo la grandezza $C = p\,D\,(A, B)$, che si è visto esistere sempre (§ 26). Sarà (§ 12, 6°)

$$C = S\Big(D\,(A,B), D\,(A,B), \dots D\,(A,B)\Big) = D\,\Big(S\,(A, A, \dots A), S\,(B, B, \dots B)\Big) =$$
$$= D\,(M, N),$$

onde, come si voleva dimostrare,

$$D\,(M, N) = C = p\,D\,(A, B).$$

27. Le classi ad una dimensione devono contenere un numero infinito di grandezze disuguali. Infatti, se A è una loro grandezza che non sia la grandezza modulo O, sarà (§ 3) $A \lesseqgtr O$ e quindi (§ 21) $A \gtrless O$. Sia, per es., $A < O$. Allora

$S\,(A, A) < S\,(O, A) = A$ (§ 25, 6°), cioè $S\,(A, A) < A$,

$S\,\Big(A, S\,(A, A)\Big) = S\,(A, A, A) < S\,(A, A)$,

$S\,(A, A, A, A) < S\,(A, A, A)$ ecc.

Le grandezze A, S (A,A), S (A, A, A) ecc. sono ciascuna minore della

precedente, e quindi (§ 25, 5°) di tutte le precedenti, e sono perciò tutte disuguali fra loro: di più sono in numero infinito e devono appartenere tutte alla classe, per cui questa non può esser composta da un numero finito di grandezze.

Classi ad uno o a due sensi. — 28. Supponiamo ora di avere una classe ad una dimensione, ed A, A′ siano due sue grandezze opposte. Se $A > 0$, sarà (§ 25, 6°)

$$S(A, A') > S(0, A').$$

Ma $S(A, A') = 0$ (§ 15), $S(0, A') = A'$ (§ 13), quindi sarà $A' < 0$. Parimente si prova che se $A < 0$, sarà $A' > 0$. Ne viene che di due grandezze opposte una è maggiore, l'altra è minore del modulo 0. Di più, se $A > B$ ed A′ e B′ sono le grandezze opposte di A e B, sarà

$$A' = D(0, A),\ B' = D(0, B) \text{ e quindi } A' < B' \text{ (§ 25, 11°)}.$$

Se nella nostra classe ogni grandezza possiede la sua opposta, diremo che la classe è *a due sensi*; e siccome di ogni coppia di grandezze opposte una è maggiore del modulo, l' altra è minore, diremo *grandezze di senso superiore* quelle maggiori di 0 e *grandezze di senso inferiore* quelle minori di 0. Evidentemente, siccome da $A \gtrless 0$, $B \gtrless 0$ si deduce rispettivamente $S(A, B) \gtrless S(0, 0)$, cioè $S(A, B) \gtrless 0$, ne viene che tutte le grandezze di senso superiore e la grandezza modulo formano una classe, ed una classe formano pure tutte le grandezze di senso inferiore insieme colla grandezza 0. Potremo dire queste classi rispettivamente *sottoclasse di senso superiore* e *di senso inferiore*, o, più semplicemente, *sottoclasse superiore* e *inferiore*, della classe a due sensi.

Una classe ad una dimensione che, oltre la grandezza modulo 0, contenga solo grandezze tutte maggiori di 0 o solo grandezze tutte minori di 0, si dirà *classe ad un senso*. Le due sottoclassi inferiore e superiore di una classe a due sensi sono classi ad un senso. Nelle classi ad un senso nessuna grandezza, all' infuori della grandezza modulo, possiede grandezza opposta.

Le classi che contengono grandezze maggiori e grandezze minori di 0, ma non sono tali da potersi dire a due sensi, intenderemo di studiarle dopo di averle completate aggiungendo le opposte di tutte le loro grandezze e le grandezze che risultano dall'applicare l' operazione S a tutte quelle della nuova categoria ottenuta.

Lo studio delle classi ad un sol senso, ma di senso inferiore, si riduce evidentemente allo studio delle corrispondenti classi opposte di senso superiore; onde, nelle classi ad una dimensione, basterà limitarsi a studiare le classi di senso superiore e le classi a due sensi.

Capitolo III.

Le classi ad una dimensione e ad un sol senso

Classi limitate ed illimitate. — 29. Una grandezza di una classe ad un senso (senso superiore) che non sia la grandezza modulo, ha sempre evidentemente nella classe infinite multiple, le quali sono tutte disuguali (§ 27). Se facciamo la risultante di una multipla mA di A con A, si ha che S(mA, A) è maggiore di mA, onde: " Le successive multiple di una grandezza A in una classe ad un senso, vanno continuamente crescendo ".

30. Nelle classi ad un senso può farsi una distinzione importante. Può darsi che nella classe, oltre la grandezza modulo O, esista una grandezza che è minore di tutte le rimanenti (tranne O), e può darsi che tale grandezza non esista, e che quindi, data una grandezza qualunque della classe, vi sia sempre in questa, oltre O, una grandezza minore. Nel primo caso diremo che la classe è *limitata*, nel secondo che è *illimitata*. La grandezza minima (dopo O) in una classe limitata si può dire la grandezza *limitatrice* della classe.

Una classe illimitata contiene, come sottoclassi, infinite classi limitate, per es. quelle ottenute prendendo una sua grandezza qualunque, le sue infinite multiple e la grandezza modulo.

Classi proprie ed improprie. — 31. Sia ora una classe ad un senso (limitata o no) ed A, B siano due sue grandezze, tali che A>B. L'operazione D (A,B) potrà esser possibile o no: ma l'operazione D (B, A) è al certo impossibile, poichè se C(>O) fosse il suo resultato, dovrebbe essere S (C,A)>S (O, A); ma S (C, A)=B, S (O, A)=A, e quindi, contro l'ipotesi, sarebbe B>A. Nelle classi ad un senso sarà quindi al più da considerarsi l'operazione D (A,B), quando A≧B. Se una classe ad un senso è tale che, date due sue grandezze disuguali qualunque A e B, con A>B, esiste sempre in essa la divergenza

D (A, B), diremo che quella classe è una *classe propria;* se invece vi sono almeno due sue grandezze A e B, essendo A>B, per le quali D (A, B) non esiste, la diremo *classe impropria.*

Esistono classi improprie. Diviene impropria, per es., qualunque classe propria a cui si tolgano tutte le grandezze minori di una data grandezza della classe, con che essa resta sempre una classe; e quindi sarà tale la classe di tutti i segmenti maggiori di un segmento dato ecc. È impropria la classe composta di due segmenti non multipli l'uno dell'altro, dei loro multipli, e delle somme geometriche di tutti i segmenti così ottenuti, non potendosi eseguire l'operazione D fra i due segmenti dati, nè fra certi loro multipli.

Noi dedicheremo il nostro studio particolarmente alle classi proprie, intendendo, quando si studia una classe di cui non si dica altro, che debba esser propria.

32. Nelle classi proprie ogni grandezza, all'infuori in tutte della grandezza modulo e nelle classi limitate anche della grandezza limitatrice, è decomponibile in parti; giacchè se A non è la grandezza limitatrice, vuol dire che nella classe ne esiste un'altra minore B (B>O); allora esiste la divergenza D (A, B) ed è una grandezza C, talchè A=S (B, C), e quindi A è decomponibile almeno nelle due parti B e C.

La sola grandezza limitatrice delle classi limitate (oltre la grandezza modulo) è indecomponibile. S'intende che questa indecomponibilità è relativa alla classe in cui si studia la grandezza stessa: in una classe più ampia, di cui quella data sia sottoclasse, potrà talora quella grandezza essere divisibile in parti.

33. Data una classe limitata di cui sia A la grandezza limitatrice, la grandezza immediatamente maggiore della grandezza modulo è A, quella immediatamente maggiore ad A è S (A, A), quella che succede a questa è S (A, A, A) ecc.; giacchè se, per es., ad S (A, A,... A) = n A non succedesse S (A, A,... A)= (n+1) A, ma invece una grandezza C minore di questa, la divergenza D (C, nA), che dovrebbe esistere essendo la classe propria, sarebbe <A, ed A non sarebbe più la grandezza limitatrice. In modo simile si mostra che, se M è una grandezza qualunque della classe, le grandezze S (M, A), S (M, A, A),.... S (M, n A),.... sono quelle che, in questo ordine stesso, le succe-

dono immediatamente. Ne resulta che le grandezze di una classe limitata si possono *incominciare a disporre* una dopo l'altra in ordine crescente colla legge accennata [1], partendo da una qualunque di esse. In questo modo, se si parte dalla grandezza limitatrice A e si prosegue con un procedimento senza termine, si verranno a considerare tutte, se nella classe non esista una grandezza (e quindi infinite) maggiore di tutte le grandezze multiple di A. — Tale è p. es. la classe degli ordini d'infinitesimo delle funzioni x^n per $x=0$, dove n prende tutti quanti i valori interi e positivi e il valore zero. In certe classi (che studieremo in seguito) esistono infinite grandezze maggiori di quelle della forma S (A, A,... A), ed allora nel modo indicato non si esauriscono tutte le grandezze della classe.

Le classi isolate e la grandezza Ω. — 34. Per la generalità e chiarezza di quello che segue crediamo ora opportune le seguenti considerazioni.

Nelle classi di grandezze si è introdotta, se già non esisteva, una grandezza la quale si è detta grandezza modulo, e che, se ci limitiamo, come ora è il caso, alle grandezze di senso superiore (§ 28), risulta minore di tutte quante le altre grandezze della classe. Introdurremo del pari in ogni classe una nuova grandezza che diremo *grandezza infinita*, che indicheremo con Ω, e che definiremo come maggiore di tutte le altre grandezze della classe. Per essa, che è da introdursi in modo formale, riterremo che sia sodisfatta la condizione

$$S(\Omega, A) = S(A, \Omega) = \Omega$$

qualunque sia A; ne viene che

$$D(\Omega, A) = \Omega.$$

Per questa grandezza rinunciamo quindi nella classe ad una delle proprietà caratteristiche dell'operazione S.

35. Ciò posto, distingueremo le classi di senso superiore che sodisfano alla seguente condizione da quelle che non vi sodisfano:

“ Non esistono grandezze minori di qualunque altra grandezza asse-
“ gnabile nella classe, all'infuori della grandezza modulo O, nè grandezze
“ maggiori di tutte le altre della classe, all'infuori della grandezza in-
“ finita Ω ”.

---

(1) Se la classe è impropria, ciò può non essere, come si vede dalla dimostrazione stessa. Ne sia un esempio la classe già citata formata dai due segmenti A e B non multipli l'uno dell'altro, dai loro multipli e dalle somme di questi. Se A < B, e quindi A è la grandezza limitatrice, fra due certi multipli consecutivi n A, $(n+1)$ A deve esser compreso B.

Le classi che sodisfano a questa condizione si diranno *classi isolate*; il perchè apparirà chiaro in seguito.

La distinzione precedente può, a prima vista, sembrare ingiustificata, perchè nessuna grandezza E *della classe* $(E>0)$ può esser minore di *tutte* le grandezze della classe, che sono >0, essendo fra quelle compresa essa stessa; e parimente nessuna grandezza che non sia Ω e che sia della classe è maggiore di *tutte* le grandezze della classe diverse da Ω. Sembra quindi inutile la distinzione accennata.

Ma si noti che in quel modo, per le classi che si son dette isolate, si viene a negare questa esistenza anche in classi più ampie di cui esse possano essere considerate sottoclassi; o, in altre parole, si conviene di ammettere che queste grandezze minori (risp. maggiori) di tutte quelle della classe e che possono esistère in classi più ampie, si ritengono uguali *per definizione* alla grandezza modulo (risp. alla grandezza infinita). Questa uguaglianza ad 0 ed a Ω delle grandezze, che pur possono esistere, minori o maggiori di quelle della classe, è da ammettersi nelle singole classi con un postulato. L'utilità della distinzione fatta si vedrà meglio in seguito, parlando delle classi di 2.ª specie.

Se la nostra classe isolata si può realmente considerare come sottoclasse di una più ampia in cui esistano delle grandezze A_1 minori e delle grandezze A_2 maggiori di tutte quelle che compongono la classe data, presa una grandezza B qualunque di questa, le grandezze $S(B, A_1)$, $S(B, A_2)$ saranno grandezze della classe più ampia accennata. Ma ritenendosi $A_1 = 0$ e $A_2 = \Omega$, sarà:

$$B' = S(B, A_1) = S(B, 0) = B, \quad \text{con } D(B', B) = A_1,$$
$$B'' = S(B, A_2) = S(B, \Omega) = \Omega.$$

Quindi può dirsi che il considerare la nostra classe come isolata, equivale a dare una nuova definizione di uguaglianza, dicendo che sono uguali due grandezze di una classe quando sono divergenti per una grandezza minore di tutte quelle di una certa sottoclasse della classe stessa, e sono uguali fra loro ed alla grandezza Ω quelle che hanno come parte una grandezza maggiore di tutte quelle della stessa sottoclasse.

36. Il dire isolata una classe può quindi dipendere o da una definizione di uguaglianza o, il che è lo stesso, da un postulato che si ammetta

quando sia già stabilito il concetto di uguaglianza e non si voglia modificarlo. L'ammissione di questo postulato è necessaria se si vuole la classe isolata.

Esso sembra a prima vista inutile quando la classe in questione è formata prendendo *tutti* gli oggetti che hanno un certo nome A (p. es. *tutti* i segmenti, *tutti* gli angoli ecc.), giacchè altri di quegli oggetti non si trovano fuori di quella classe che li comprende tutti. Ma la questione è così semplicemente nascosta. Dicendo un ente A, si vuol dire un ente di una classe già definita e costituita, e fra gli enti A di una classe si è già detto che non possono esistere grandezze maggiori o minori di tutte quelle della classe all'infuori di Ω ed O. Ma possono esistere (e questa esistenza non dipende che da un postulato) altri enti che si sogliono o si vogliono ordinariamente indicare con un altro nome B, i quali, combinati per mezzo della stessa operazione S fra loro e cogli A, possono dare una classe più ampia di grandezze, fra le quali ve ne siano di quelle da dirsi dire maggiori o minori di tutte le A. Se anche a queste grandezze diamo il nome A, allora avremo ottenuto le grandezze maggiori e minori di tutte quelle della classe primitiva. Il postulato è quindi tacitamente incluso nel considerare quella classe di oggetti e nel dare *soltanto* a tutti quegli oggetti un nome, intendendo così che qualunque oggetto che non sia di quella classe non possa ricever quel nome. Il postulato in questione si ritrova perciò nella definizione del nome A di quella classe, e nei postulati che completano quella definizione.

Per es., per i segmenti la condizione che la loro classe è isolata può ritrovarsi nel postulato che si suole ammettere per essi (come in generale per qualunque linea finita) che, cioè, un segmento sia l'insieme di tutti i suoi punti; sopprimendolo, siamo subito guidati a degli enti che potremo pur dire segmenti, e che, estendendo il concetto geometrico di maggiore e minore, devon dirsi minori di tutti gli ordinari segmenti. Infatti in tal caso gli infiniti punti del segmento si può ammettere che non giacciano consecutivi su di esso, talchè si possono considerare separati da altrettanti enti, ciascuno dei quali ha le caratteristiche del segmento ordinario (segmento finito) senza esser tale, e non può esser contenuto un numero finito di volte sul segmento (finito) considerato in principio, giacchè ogni segmento deve contenere infiniti punti. In ogni segmento finito vi sono quindi infiniti enti

(simili ai segmenti) dei quali ciascuno non è finito ed è da considerarsi minore di qualunque segmento. Se ai nuovi enti, che si ammettono esistenti mediante un postulato, diamo il nome di segmenti (infinitesimi), abbiamo ottenuto dei segmenti minori di tutti quelli dell'ordinaria classe dei segmenti (finiti) (1).

Concludendo, nessuna classe è *di per sè* isolata, e non divien tale che con un postulato, il quale è incluso nella definizione delle grandezze della classe, se la classe è quella di *tutte* le grandezze che portano un medesimo nome.

Gruppi e spezzamenti d'una classe. — 37. Data una classe di grandezze, è sempre possibile, ed in infiniti modi, decomporla in due gruppi $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ dotati delle seguenti proprietà:

1.° Ogni grandezza della classe appartiene ad uno dei gruppi e ad uno solo.

2.° Se P_1 è una grandezza di $\mathbf{P}_1$, è di $\mathbf{P}_1$ anche ogni grandezza $P'<P_1$; se P_2 è una grandezza di $\mathbf{P}_2$, tale è anche ogni $P'>P_2$.

Basta, se non altro, per fare una di queste scomposizioni, prendere, per es., una grandezza qualunque A, e mettere in $\mathbf{P}_1$ tutte le grandezze della classe che sono $\leqq A$, e in $\mathbf{P}_2$ le altre $>A$.

Qualunque sia quella decomposizione, sarà intanto evidentemente ogni grandezza del gruppo $\mathbf{P}_1$ minore di ogni grandezza del gruppo $\mathbf{P}_2$.

In generale, data una di tali scomposizioni in gruppi, dovrà presentarsi uno di questi 4 casi:

1.° Il gruppo $\mathbf{P}_1$ ammette una grandezza massima P_1° ed il gruppo $\mathbf{P}_2$ una grandezza minima P_2°.

2. $\mathbf{P}_1$ ammette una grandezza massima P_1° e $\mathbf{P}_2$ *non* ammette grandezza minima; talchè data una grandezza di $\mathbf{P}_2$ ve ne è sempre in $\mathbf{P}_2$ una minore.

3.° $\mathbf{P}_1$ *non* ammette grandezza massima e $\mathbf{P}_2$ ammette una grandezza minima P_2°.

4.° $\mathbf{P}_1$ non ammette grandezza massima, e $\mathbf{P}_2$ non ammette grandezza minima.

---

(1) Du Bois-Reymond. *Die Allgemeine Functionentheorie.* Cap. I.

Nel 1.° caso la classe deve esser limitata, perchè altrimenti, essendo $D(P_2^0, P_1^0) = C$ (¹), esisterebbe nella classe una grandezza $C' < C$ diversa da O, ed $S(P_1^0, C')$, diversa da P_1^0, non apparterrebbe a nessuno dei gruppi. La classe essendo quindi limitata, deve essere $D(P_2^0, P_1^0) = U$, dove U è la grandezza limitatrice della classe.

Il 2.° e il 3.° caso sono impossibili se la classe è limitata, giacchè $S(P_1^0, U)$ dovrebbe nel secondo caso essere la grandezza minima di $\mathbf{P}_2$ e $D(P_2^0, U)$ nel 3.° caso la grandezza massima di $\mathbf{P}_1$, contro l'ipotesi. In quei casi la classe dovrà quindi essere illimitata: e di più, se E è una grandezza qualunque della classe, dovrà nel 2.° caso essere $S(P_1^0, E)$ una grandezza di $\mathbf{P}_2$, e nel 3.° caso $D(P_2^0, E)$ una grandezza di $\mathbf{P}_1$; onde in ambedue i casi la divergenza fra le grandezze di $\mathbf{P}_2$ e quelle di $\mathbf{P}_1$ potrà rendersi minore di qualunque grandezza della classe.

Finalmente il 4.° caso può avvenire nelle classi limitate e nelle illimitate. Se avviene in una classe limitata, la divergenza fra una grandezza qualunque P_2 di $\mathbf{P}_2$ ed una qualunque P_1 di $\mathbf{P}_1$ è sempre maggiore di qualunque multipla della grandezza U limitatrice della classe, giacchè altrimenti, se fosse $D(P_2, P_1) \leqq m U$, fra P_1 e P_2 vi sarebbero al più le sole grandezze (§ 33) $S(P_1, U)$, $S(P_1, U, U) \ldots S(P_1, (m\text{-}1)U)$, e due consecutive di queste dovrebbero allora chiaramente essere l'una la massima di $\mathbf{P}_1$, l'altra la minima di $\mathbf{P}_2$. Invece nelle classi illimitate può avvenire che la divergenza $D(P_2, P_1)$ si mantenga maggiore di qualche grandezza della classe, come pure che divenga minore di qualunque grandezza assegnabile nella classe stessa.

Nel 1.° caso, possibile quindi solo nelle classi limitate, diremo che $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ sono i due gruppi di una *successione* della classe; nel 2.° e 3.° caso, possibili solo nelle classi illimitate, diremo che sono i gruppi di un *collegamento* della classe; nel 4.° caso, diremo che sono i gruppi di uno *spezzamento* della classe, e precisamente diremo che lo spezzamento è una *sezione* (²) quando la divergenza fra le grandezze di P_2 e quelle di P_1 può rendersi minore di

(¹) Ricordiamo che si è ammesso di studiare sempre, quando non si dica esplicitamente il contrario, le classi proprie.

(²) Cfr. DEDEKIND. *Stetigkeit und irrationale Zahlen* — STOLZ. Op. cit. e *Mathematische Annalen* Bd. XXII, pag. 504.

qualunque grandezza della classe, ed è un *salto*, quando questa divergenza si mantiene maggiore di qualche grandezza della classe, oltre, s'intende, la grandezza modulo.

Le divisioni in gruppi delle classi limitate produrranno quindi delle successioni o dei salti, mentre quelle delle classi illimitate potranno dare o dei collegamenti, o delle sezioni, o dei salti [1].

Se in un salto la divergenza fra le grandezze di $\mathbf{P}_2$ e quelle di $\mathbf{P}_1$ si mantiene maggiore della grandezza M, diremo che l'*ampiezza di quel salto è maggiore di* **M**.

È utile notare che, se due gruppi $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ appartengono ad un salto e quindi le divergenze $D(P_2, P_1)$ si mantengono maggiori di una grandezza Q della classe data, si manterranno maggiori anche di qualsiasi multipla di Q; giacchè, se P_1 è di $\mathbf{P}_1$, essendo $S(P_1, Q)$, e quindi $S(S(P\ , Q), Q) = S(P_1, Q, Q)$, e così $S(P_1\, Q, Q, Q)$, e in generale $S(P_1, mQ)$ (con mQ multipla qualunque di Q) tutte grandezze di $\mathbf{P}_1$, ed essendo quindi la divergenza fra P_2 ed $S(P_1, mQ)$ (con P_2 e P_1 qualunque rispettivamente in $\mathbf{P}_2$ e $\mathbf{P}_1$) maggiore di Q, sarà la divergenza fra P_2 e P_1 anche maggiore di $S(mQ, Q)$ e quindi di qualunque multipla di Q.

38. Volendo studiare le classi dal punto di vista del modo con cui in esse si succedono le grandezze, s'intende che si dovrà porre attenzione all'effetto che producono tutte le possibili divisioni in gruppi che si possono fare in esse.

Più generalmente potremo portare il nostro studio, oltrechè sulla classe totale Γ, anche sulle divisioni in gruppi delle sue sottoclassi Π, che inten-

---

(1) Se si studiassero anche le classi improprie, dovremmo aggiungere altri casi a quelli accennati. Innanzi tutto dovremmo definire quelli in altro modo, per togliere la parola « divergenza », giacchè non sappiamo se, date due grandezze qualunque di una classe impropria, esiste la loro divergenza. E inoltre non sarebbe da escludersi il caso di $\mathbf{P}_1$ senza massimo e $\mathbf{P}_2$ con minimo, nelle classi limitate, giacchè la grandezza $D(P_2^o, E)$ non occorre più che esista nella classe. E nelle classi illimitate, quando $\mathbf{P}_1$ non ha massimo e $\mathbf{P}_2$ ha un minimo, potrebbe non aversi il caso che si è detto collegamento, giacchè ora la grandezza $D(P_2^o, E)$ non si sa se esiste nella classe; onde potrebbe essere che, prese le grandezze P_1 di $\mathbf{P}_1$ e una certa grandezza E_0, tutte le $S(P_1, E_0)$ fossero di $\mathbf{P}_1$. Questo nuovo caso, che può avvenire anche nelle classi limitate, potremmo chiamarlo pur *salto*. Ne avremmo un esempio in una classe formata dagli ordini d'infinitesimo di $\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)^m x^n$ (con m intero e positivo o zero, n qualunque positivo o zero). Fra gl'infinitesimi di x^n e gli altri vi è un salto, in cui $\mathbf{P}_2$ ha per grandezza minima l'infinitesimo di $\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)$.

deremo sempre siano proprie. Quanto a queste classi Π, è bene osservare, che, quando si distinguono rispetto alla loro limitazione, si deve vedere se, presa una *loro* grandezza qualunque (che non sia O), esiste o no *in esse* sempre una grandezza minore (che non sia O), dicendole limitate nel 1.° caso, illimitate nel 2.°. Non è da credersi, che, perchè sono sottoclassi di Γ, debba, affinchè sieno per es. illimitate, per ogni grandezza di Γ esservene una minore in Π. In altre parole la classe Π, per giudicare se è limitata o no, deve esser considerata come isolata (§ 35).

Se Γ è illimitata, possono in essa esistere delle sottoclassi limitate, come pure, se Γ è limitata, può aver delle sottoclassi illimitate Π. Ma in quest' ultimo caso tutte le grandezze della sottoclasse illimitata Π devono esser maggiori di qualunque multipla della grandezza limitatrice U di Γ; giacchè, altrimenti, presa una grandezza di Π che non fosse maggiore di tutte quelle multiple e quindi fosse uguale a qualche multipla *m* U di U (1), non vi sarebbero, minori di essa, che un numero *finito* di grandezze (cioè le sole multiple precedenti (§ 33)) nella classe Γ, e quindi, a più forte ragione, in Π; e Π non sarebbe allora illimitata.

39. Studiamo ora in modo particolare gli spezzamenti della classe Γ e delle sue sottoclassi Π.

Ad ogni spezzamento di una sottoclasse Π di Γ corrisponde per definizione una divisione di essa in due gruppi $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ tali che:

1.° Ogni grandezza di Π appartiene ad uno e ad un solo di essi.

2.° Se P_1 è una grandezza di $\mathbf{P}_1$, ogni $P' < P_1$ è del gruppo $\mathbf{P}_1$; e se P_2 è di $\mathbf{P}_2$, ogni $P'' > P_2$ è del gruppo $\mathbf{P}_2$.

3.° $\mathbf{P}_1$ non ammette grandezza massima, nè $\mathbf{P}_2$ grandezza minima; talchè, se P′ è una grandezza qualunque di $\mathbf{P}_1$, a $\mathbf{P}_1$ appartiene pure un' altra grandezza S (P′,X); e se P″ è una grandezza qualunque di $\mathbf{P}_2$, a $\mathbf{P}_2$ appartiene pure un' altra grandezza D (P″,Y).

Se $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ sono i gruppi di una sezione di Π, allora la divergenza fra

(1) Una grandezza non maggiore di tutte le multiple di U deve essere uguale ad una di esse, altrimenti dovrebbe esser compresa fra due multiple consecutive *m* U, (*m* + 1) U, il che è impossibile, essendo Γ una classe propria (V. § 33). Se la classe è impropria, il teorema può non valere; p. es. la classe (impropria) limitata di tutti i segmenti eguali o maggiori di un segmento dato ha per sottoclasse illimitata quella di tutti i segmenti maggiori di quel segmento stesso; e questi non sono maggiori dei multipli del segmento minimo della classe data.

una grandezza di $\mathbf{P}_2$ ed una di $\mathbf{P}_1$ può divenire minore di qualunque grandezza di Π (non necessariamente di qualunque di Γ) e Π sarà una classe illimitata; se invece vi è un salto, la divergenza si mantiene maggiore di qualche grandezza di Π, per cui anche di qualche grandezza di Γ.

S'intende che per la classe Π può prendersi anche la classe totale Γ, su cui quindi si possono fare le considerazioni che si fanno per Π.

40. Mostriamo intanto che:

" Se in una sottoclasse Π della classe Γ (o in Γ stessa) esiste uno spez-
" zamento, devono esisterne infiniti dello stesso genere di quello (cioè o
" sezioni o salti) „.

Dico che se $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ è una divisione di Π in gruppi corrispondenti ad uno spezzamento, ed A è una grandezza qualunque di Π, un' altra divisione in gruppi, corrispondente ad uno spezzamento, sarà data dai gruppi $\mathbf{P}_1'$, $\mathbf{P}_2'$, dove le grandezze P' di $\mathbf{P}_1'$ e P'' di $\mathbf{P}_2'$ sono quelle date rispettivamente da

$$(1) \quad P' \leqq S(P_1, A), \qquad P'' > S(P_1, A) \text{ cioè} = S(P_2, A),$$

quando P_1 e P_2 percorrono rispettivamente tutte le grandezze di $\mathbf{P}_1$ e di $\mathbf{P}_2$. Infatti: 1.° o una grandezza P di Π è $\leqq$ A, ed è allora del gruppo $\mathbf{P}_1'$; o, se è $>$A, esiste la grandezza D (P, A): e D (P, A) o è una grandezza P_1 di $\mathbf{P}_1$, ed allora $P = S(P_1, A)$, e P è del 1.° gruppo $\mathbf{P}_1'$ (v. (1)): oppure D(P, A) è una grandezza P_2 di $\mathbf{P}_2$, e allora $P = S(P_2, A)$, e P è del gruppo $\mathbf{P}_2'$ (v. (1)) — 2.° Se P' è di $\mathbf{P}_1'$, evidentemente è tale ogni $P < P'$; e se P'' è di $\mathbf{P}_2'$ così è di ogni $P > P''$. — 3.° Nè $\mathbf{P}_1'$ ha grandezza massima, nè $\mathbf{P}_2'$ grandezza minima; giacchè, se P_0 fosse la grandezza massima di $\mathbf{P}_1'$ o la minima di $\mathbf{P}_2$, evidentemente $D(P_0, A)$ sarebbe la grandezza massima di $\mathbf{P}_1$ o la minima di $\mathbf{P}_2$. — Quindi $\mathbf{P}_1'$, $\mathbf{P}_2'$ è la divisione in gruppi di uno spezzamento. Di più, le divergenze fra le grandezze di $\mathbf{P}_2'$ e $\mathbf{P}_1'$ coincidendo evidentemente colle divergenze fra le grandezze di $\mathbf{P}_2$ e $\mathbf{P}_1$, questa divisione corrisponderà ad una sezione o ad un salto, secondochè era una sezione od un salto lo spezzamento dato.

Se A è una grandezza di $\mathbf{P}_1$, tale che tutte le $S(P_1, A)$ appartengano di nuovo a $\mathbf{P}_1$, lo spezzamento che si ottiene coincide collo spezzamento dato. È invece uno spezzamento distinto, se A è tale che qualche grandezza $S(P_1, A)$ appartenga a $\mathbf{P}_2$, per es. se è uguale alla divergenza fra una grandezza di $\mathbf{P}_2$ ed una di $\mathbf{P}_1$, o se è uguale ad una grandezza del gruppo $\mathbf{P}_2$;

da questo spezzamento, prendendo una grandezza A del nuovo secondo gruppo $\mathbf{P}_2'$, si ottiene un nuovo spezzamento, e così via, talchè, come dovevasi dimostrare, questi spezzamenti sono in numero infinito.

41. " Se in una sottoclasse Π di una classe Γ vi è un salto, v'è un " salto (e quindi (§ 40) ve ne sono infiniti) anche nella classe totale Γ. "

Infatti siano $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ i due gruppi del salto di Π, talchè le divergenze $D(P_2, P_1)$ delle loro grandezze si mantengano sempre maggiori di una grandezza Q di Π, e quindi le grandezze $S(P_1, Q)$ siano tutte grandezze di $\mathbf{P}_1$. Presa una grandezza P_1' del gruppo $\mathbf{P}_1$, possiamo distinguere le grandezze di Γ in grandezze che unite coll'operazione S a P_1' danno per risultanti grandezze minori o uguali a qualche grandezza P_1 (e quindi sempre minori di qualche P_1) e grandezze che aggiunte a P_1' danno per risultanti grandezze maggiori di tutte le P_1. Questa è la divisione in gruppi di uno spezzamento di Γ. Infatti: — 1° Ogni grandezza A di Γ unita a P_1' coll'operazione S dà una risultante $S(A, P_1')$, che è necessariamente o non maggiore di qualche P_1, o maggiore di tutte le P_1, e quindi appartiene all'uno o all'altro gruppo e ad uno solo. — 2.° Se A_1 è una grandezza del 1° gruppo così formato, ciò vuol dire che sarà $S(A_1, P'_1)$ minore di qualche P_1; a più forte ragione lo sarà $S(A_1', P_1')$, se $A_1' < A_1$; quindi A_1' appartiene pure al 1° gruppo. Così pure, se A_2 è nel secondo gruppo, vi è anche ogni $A_2' > A_2$. — 3.° Se A è una grandezza del primo di questi gruppi, sarà $S(A, P_1')$ minore di qualche grandezza P_1^0 di $\mathbf{P}_1$. Allora anche $S(A, Q)$, dove Q è la grandezza già citata, è pure del 1° gruppo, giacchè, essendo $S(A, P_1') < P_1^0$, sarà $S(A, Q, P'_1) < S(P_1^0, Q)$. Ma $S(P_1^0, Q)$ è di $\mathbf{P}_1$, per il significato di Q; quindi $S\left(S(A, Q), P_1'\right) = S(A, Q, P_1')$ è minore di qualche grandezza di $\mathbf{P}_1$, onde $S(A, Q)$ è ancora una grandezza del primo dei nuovi gruppi, il quale non ha perciò grandezza massima. Così, se B è una grandezza del secondo dei nuovi gruppi, sarà $S(B, P_1') > P_1$, con P_1 grandezza *qualunque* del gruppo $\mathbf{P}_1$, e quindi anche $S(B, P_1') > S(P_1, Q)$, giacchè, per il significato di Q, sarà $S(P_1, Q)$ ancora una grandezza P_1 di $\mathbf{P}_1$. Allora, essendo $S(B, P_1') > Q$, esisterà $D\left(S(B, P'_1), Q\right)$, e sarà $D\left(S(B, P'_1), Q\right) > D\left(S(P_1, Q), Q\right)$ cioè (§ 12, 3°) $S\left(D(B, Q), P_1'\right) > P_1$, talchè $D(B, Q)$ è ancora una grandezza del secondo dei nuovi gruppi, il quale non ha quindi

grandezza minima. I due nuovi gruppi $\mathbf{P}'_1$ e $\mathbf{P}'_2$ corrispondono quindi ad uno spezzamento in Γ. — Di più, questo spezzamento è un salto. Infatti, se A è di $\mathbf{P}'_1$, si è già dimostrato che S (A, Q) è ancora di $\mathbf{P}_1'$; onde, per ottenere una grandezza di $\mathbf{P}_2'$, occorre aggiungere coll'operazione S a qualunque A una grandezza > Q: perciò, se B è una grandezza qualunque di $\mathbf{P}_2'$, sarà D (B, A) > Q qualunque siano B ed A. Quindi quello spezzamento è un salto, come dovevamo dimostrare.

42. " Se Γ è una classe limitata con una sottoclasse illimitata Π, essa " deve possedere infiniti salti. „

Infatti dovendo (§ 38) le grandezze di Π essere tutte maggiori di qualunque multipla della grandezza limitatrice U di Γ, possiamo decomporre le grandezze di Γ in due gruppi, ponendo nell'uno tutte le grandezze multiple di U, nell'altro tutte quelle non multiple e quindi maggiori di tutte le multiple (§ 33), le quali esistono a causa della sottoclasse Π. Del gruppo $\mathbf{P}_1$ non esistendo la grandezza massima, la divisione in gruppi fatta nella classe *limitata* Γ non darà luogo ad una successione, ma ad un salto (§ 37). Ma essendovi in Γ un salto, ve ne sono infiniti (§ 40), quindi è vero il teorema.

43. Se in una sottoclasse Π si ha una sezione quando essa si considera come isolata, ed i gruppi della sezione sono $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$, quando invece Π si considera di nuovo come appartenente alla classe totale Γ, può darsi o che non vi sia nessuna grandezza di Γ che sia maggiore di tutte le P_1 di $\mathbf{P}_1$ e insieme minore di tutte le P_2 di $\mathbf{P}_2$, oppure che ve ne sia una sola, o finalmente che ve ne sia più d'una. Mostriamo intanto che:

1° " Se Γ è una classe limitata e Π è una sua sottoclasse illimitata, ad " una sezione di Π o non corrisponde nessuna grandezza di Γ, o ve ne cor- " rispondono infinite. „

Se infatti A è una grandezza di Γ che è maggiore di tutte le grandezze del gruppo $\mathbf{P}_1$ di Π e minore di tutte quelle del gruppo $\mathbf{P}_2$, siccome tutte le grandezze di Π sono maggiori di tutte le multiple della grandezza limitatrice U della classe Γ (§ 38), avremo che di tal proprietà godrà anche la A, che è maggiore di alcune grandezze di Π. Allora le infinite grandezze D (A, m U) e le infinite S (A, m U) devono essere $> \mathbf{P}_1$ e $< \mathbf{P}_2$; altrimenti se, per es., fosse D (A, p U) $\leqq P_1$ (P_1 grandezza di $\mathbf{P}_1$) allora fra A e D (A, p U) essendovi solo le grandezze D (A, U), D(A, 2 U),... D (A, (p-1) U)

di Γ e quindi *al più* tutte queste di Π, una di esse sarebbe la grandezza massima di $\mathbf{P}_1$, e non avremmo una sezione. — Così dicasi per le grandezze S (A, *m* U).

2° " Se Γ è una classe illimitata e Π è una sua sottoclasse illimitata con " una sezione, se a questa sezione corrisponde in Γ più d' una grandezza, ne " corrispondono infinite. „

Infatti, se A_1 e A_2 sono due delle grandezze citate di Γ, e $A_2 > A_1$, la grandezza $D(A_2, A_1)$, che deve esistere nella classe propria Γ, sarà minore di qualunque grandezza $D(P_2, P_1)$ e quindi di qualunque grandezza di Π, essendo P_1 e P_2 grandezze dei due gruppi $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ di una sezione in Π. Allora le infinite grandezze E di Γ, tali che $E < D(A_2, A_1)$, sono pure minori di tutte le grandezze di Π, e perciò le infinite grandezze $S(A_1, E)$, per le quali è $A_1 < S(A_1, E) < A_2$, sono comprese fra $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$, c. d. d.

44. " Se Γ è una classe illimitata e Π è una sua sottoclasse pure illimitata, " la quale possegga una sezione cui corrispondano in Γ più di una e quindi " (§ 43, 2°) infinite grandezze, la classe Γ possiede infiniti salti. „

Infatti in tal caso, come si è provato nel teorema precedente, esistono in Γ infinite grandezze minori di tutte quelle di Π. Distinguiamo le grandezze di Γ in due gruppi, ponendo in uno quelle che sono maggiori od uguali a qualcuna delle grandezze P di Π (e quelle uguali ad una P sono maggiori di infinite altre P, essendo Π illimitata) e nell'altro le grandezze che sono minori di tutte le P. Questa è evidentemente una divisione in gruppi; di più dico che appartiene ad un salto. Infatti, indico con A le grandezze del 1° gruppo (> P) e con B quelle del 2° gruppo (< P). Se D (A , B) può divenire minore di qualunque grandezza E di Γ, si prenda A_1 fra le A e B_1 fra le B, in modo che $D(A_1, B_1) = E_1 < E$, essendo E una grandezza B, cioè una grandezza della Γ minore di tutte quelle di Π. Sarà $S(B_1, E_1) = A_1$: quindi $S(B_1, E_1)$ è una grandezza del 1° gruppo, ed è perciò maggiore di qualche grandezza, per es. P_1, di Π. Ma Π è illimitata, dunque esiste in essa una grandezza $P_1' < P_1$, e la divergenza $D(P_1, P_1')$ è una grandezza di Π, e quindi è $>E$: per cui $D(P_1, P_1')>E_1$ cioè $D(P_1, E_1) > P_1'$. Ma si è detto che $S(B_1, E_1) > P_1$, cioè $B_1 > D(P_1, E_1)$; sarà quindi a maggior ragione $B_1 > P_1'$, contro l'ipotesi che B_1 sia una grandezza B, e quindi minore di tutte le P. Le grandezze D (A , B) non possono quindi divenir

minori di qualunque grandezza di Γ, e in Γ vi è perciò un salto, e quindi ve ne sono infiniti.

Riassumendo intanto i resultati già ottenuti, possiamo concludere:

" Se in una classe qualunque Γ vi è una sottoclasse illimitata Π la " quale possegga una sezione cui corrisponda in Γ più d' una grandezza, ve " ne corrispondono infinite, ed in Γ vi sono infiniti salti. "

Giacchè, o Γ è limitata, ed allora se ad una sezione di Π corrispondono grandezze, queste devono essere infinite (§ 43, 1°), e per il solo fatto che, essendo essa limitata, la sua sottoclasse Π è illimitata, essa viene ad avere infiniti salti (§ 42); o Γ è illimitata, ed allora si cade nel caso del teorema precedentemente dimostrato (§ 44).

Serie convergenti e limiti. — 45. Diremo *coppie di serie di grandezze* due gruppi p_1 e p_2, ciascuno di infinite grandezze di una classe, tali che ogni grandezza del primo sia minore di ognuna del secondo, e nel primo presa ogni sua grandezza P_1 ve ne sia un'altra P_1' maggiore di essa, e nel secondo per ogni sua grandezza P_2 ve ne sia un' altra P'_2 minore di essa, cioè i due gruppi non ammettano rispettivamente grandezza massima e grandezza minima. Le coppie di serie differiscono dai gruppi fin qui già considerati in questo: che per esse non si richiede che ogni grandezza della classe faccia necessariamente parte dell'una o dell'altra serie, come invece si richiede per la divisione in gruppi.

Potranno darsi due casi: o le divergenze $D(P_2, P_1)$ fra ciascuna grandella seconda serie p_2 e ciascuna della prima serie p_1 possono divenire minori di qualunque grandezza della classe totale Γ, oppure si mantengono maggiori di qualche grandezza di Γ. Nel 1° caso, in cui evidentemente la classe Γ deve essere illimitata, le coppie di serie si diranno *serie convergenti nella classe totale*, o, semplicemente, *serie convergenti*; nel 2° caso, *serie non convergenti*. Nel 2° caso, in cui Γ può esser limitata od illimitata, può avvenire che esista una sottoclasse illimitata Π di Γ, cui pure appartengano le due serie, o almeno tale, che, senza che le serie vi appartengano assolutamente, per ogni P_1 della serie p_1 esista in Π una grandezza $> P_1$ e minore di tutte le P_2 della serie p_2, e per ogni P_2 di p_2 esista in Π una grandezza $< P_2$ e maggiore di tutte le P_1; in ciascuna di queste due ipotesi la divergenza $D(P_2, P_1)$ può divenire minore di qualunque grandezza di Π,

oppure no: nel 1° caso le serie si diranno *convergenti nella sottoclasse* Π, nel 2° *serie non convergenti in* Π. Finalmente può darsi che non esistano sottoclassi cui le serie appartengano, neppure nel significato più generale ora accennato.

In qualunque caso, peraltro, le serie devono appartenere almeno ad una classe, che è la classe totale Γ da cui sono state tolte: e rispetto a quella si potrà sempre giudicare se son convergenti o no. Vi sono certe classi (quelle che in seguito diremo continue) per le quali si può dimostrare che almeno una sottoclasse Π, cui appartenga (nel senso più generale) una coppia qualunque di serie, esiste sempre, ed è la sottoclasse di quelle grandezze che diremo razionali rispetto ad un' unità.

46. Se date due serie convergenti di una certa classe illimitata, esiste nella classe stessa una grandezza maggiore di tutte quelle della prima serie p_1 e minore di tutte quelle della seconda p_2, diremo che quella grandezza è *limite* di quella coppia di serie convergenti. È allora evidente il teorema:

1° " Se una grandezza A è limite di una coppia di serie convergenti, e " B = A, anche A è limite della medesima coppia di serie. „

Considerando una classe Γ ed in essa una divisione in gruppi che appartenga ad un collegamento, se prendiamo per coppie di serie i gruppi stessi toltavi quella grandezza X che è massima del primo gruppo o minima del secondo, evidentemente le due coppie di serie devono esser convergenti, e X è il loro limite.

Circa il numero dei limiti di una coppia di serie convergenti, possiamo intanto dimostrare il seguente teorema:

2° "Se la classe Γ si considera isolata ed in essa si prende una coppia " di serie convergenti, se queste ammettono una grandezza limite, non ne " ammettono che una sola, cioè tutte le grandezze limiti di quella coppia " di serie sono da dirsi uguali. „

Infatti, se vi sono due limiti A_1, ,A_2 ed è $A_2 > A_1$ la divergenza $D(A_2, A_1)$ dev' esser minore di tutte le divergenze $D(P_2, P_1)$ fra le grandezze delle due serie, e quindi, essendo queste convergenti, dev'essere $D(A_2, A_1)$ minore di tutte le grandezze della classe Γ; e perciò, considerandosi Γ isolata, deve quella divergenza considerarsi eguale alla grandezza O; e quindi A_2 deve considerarsi uguale ad A_1.

47. Se due serie sono convergenti rispetto ad una certa sottoclasse Π, può avvenire che nella sottoclasse stessa, considerata come isolata, esista una loro grandezza limite, nel qual caso, per il teorema precedente, questa sarà unica. Diremo allora che le due serie *hanno un limite nella sottoclasse* Π. Può darsi invece che questa grandezza non esista. Allora le grandezze di Π possono dividersi in due gruppi, ponendo nel primo $\mathbf{P}_1$ quelle che sono minori di qualche grandezza P_1 della prima serie p_1, e quindi di tutte le P_2 della seconda, e nel secondo gruppo $\mathbf{P}_2$ quelle non minori di nessuna P_1, e quindi maggiori di tutte le P_1 e maggiori anche di qualche P_2. La classe risulta divisa in due gruppi, altrimenti esisterebbero in essa, contro l'ipotesi, grandezze maggiori di tutte le P_1 e minori di tutte le P_2. I due gruppi determinano una sezione in Π, giacchè P_1 di p_1 e P_2 di p_2 sono grandezze rispettivamente del 1° e del 2° gruppo, e la loro divergenza $D(P_2, P_1)$ va indefinitamente decrescendo rispetto a Π, essendo per ipotesi le due serie convergenti. Considerata ora la sottoclasse Π non più come isolata, ma come facente parte della classe totale Γ, potrà avvenire che nessuna grandezza Γ sia maggiore di tutte quelle di $\mathbf{P}_1$ e minore di tutte quelle di $\mathbf{P}_2$, nel qual caso vi sarà evidentemente in Γ uno spezzamento i cui gruppi $\mathbf{P}_1'$ e $\mathbf{P}_2'$ contengono rispettivamente i gruppi $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$, oppure che vi siano in Γ una o più (e allora sono infinite) grandezze che *riempiono la sezione di* Π, cioè che sono maggiori di tutte le grandezze del gruppo $\mathbf{P}_1$ di Π e minori di tutte quelle del gruppo $\mathbf{P}_2$. — Se queste grandezze esistono, diremo che *quelle coppie di serie, convergenti nella sottoclasse* Π, *hanno dei limiti in* Γ.

Se la classe Π è la classe totale Γ, o le serie convergenti hanno un limite ed uno solo, o determinano una divisione in gruppi che corrisponde ad una sezione di Γ, la quale naturalmente non è riempita da nessuna grandezza, finchè almeno la classe Γ, essendo data isolata, non si deve considerare come sottoclasse di qualche classe più ampia.

Data quindi una coppia di serie, se esse sono convergenti nella classe totale Γ o in una sua sottoclasse Π, necessariamente o posseggono una grandezza limite nella classe cui appartengono, o danno origine in essa ad una sezione. Se quindi la classe Γ è tale che riempie tutte le sezioni che si possono avere in tutte le sue sottoclassi, tutte le coppie di serie convergenti (re-

lativamente a Γ o a Π) hanno nella classe Γ uno o più (infiniti) limiti [1].

48. Se una classe Γ ammette una divisione in gruppi che appartenga ad un collegamento o ad una sezione, la diremo *connessa rispetto a quella divisione in gruppi;* e se tutte le possibili divisioni in gruppi conducono a collegamenti od a sezioni, cioè non conducono mai a successioni od a salti, diremo la classe Γ senz' altro *connessa* [2]. Se la classe Γ è connessa, tali devono essere anche tutte le sue sottoclassi illimitate, essendosi dimostrato che le classi illimitate non posseggono successioni (§ 37), e che se una sottoclasse di Γ possiede salti, ne possiede anche la classe totale Γ (§ 41).

Le classi connesse devono evidentemente essere illimitate.

Se costruita una sottoclasse Π di una classe qualunque Γ, si trova che essa possiede una sezione, la quale è riempita da una o da infinite grandezze di Γ, diremo che la classe Γ è *chiusa rispetto a quella sezione di* Π, e quella grandezza o quelle infinite grandezze saranno le grandezze *limiti* della sezione. Se la classe Γ è chiusa in ogni sezione possibile di qualunque sua possibile sottoclasse, ed è chiusa anche rispetto a sè stessa nel senso che non possiede sezioni (le quali non potrebbero riempirsi), la classe Γ si dirà *chiusa* senz'altro: in questo caso tutte le possibili coppie di serie convergenti ammettono dei limiti (§ 47). Col dire quindi che una classe è chiusa, non s' intende già di escludere che abbia dei salti, ma di escludere che essa abbia delle sezioni (che non potrebbero esser riempite) e di ammettere l'esistenza in essa di grandezze limiti per le sezioni delle sue sottoclassi.

Le sottoclassi di classi chiuse, e quindi anche le classi chiuse stesse, possono possedere dei salti, quelle di classi connesse no; le classi connesse non possono possedere salti, ma possono avere delle sezioni.

Le classi chiuse, tali che i limiti di una o più sezioni di qualche loro sottoclasse sono più di uno, e quindi infiniti, non possono essere connesse, giacchè si è mostrato (§ 44) che queste classi devono contenere dei salti.

Una classe Γ illimitata che sia insieme connessa e chiusa, è tale quindi che per ogni sezione, e perciò (§ 47) anche per ogni coppia di serie convergenti rispetto alla classe Γ od a qualunque sua sottoclasse Π, esiste una

---

[1] Molti dei teoremi fin qui enunciati possono non esser veri per le classi improprie; per es. si possono dare esempi di classi improprie in cui non sian veri i teoremi dei §§. 42, 43, 46 2.°

[2] STOLZ. Op. cit. — CANTOR. *Mathematische Annalen* Bd XXI.

grandezza limite (essendo Γ chiusa) ed una sola (essendo Γ anche connessa): di più nella classe Γ non vi sono nè successioni, nè salti (perchè si suppone connessa) nè sezioni (perchè si suppone chiusa). Una tal classe si dirà una classe *continua* (1). — Qualunque divisione in gruppi di una classe continua non potrà dar luogo che a collegamenti.

Si vede facilmente che ogni sottoclasse Π di una classe continua Γ, se è illimitata, è connessa, ma non può mai esser continua; giacchè se A è una delle grandezze di Γ che non comparisce in Π, le grandezze di Π si possono decomporre in due gruppi, ponendo nell' uno le sue grandezze $< A$ e nell'altro quelle $> A$; a questa divisione in gruppi corrisponde in Π o una successione o una sezione, e Π non è quindi continua.

Se una classe Γ non ha salti o successioni fra i limiti O ed A, cioè le divisioni in gruppi in cui A faccia parte del 2° gruppo P_2, non portano che collegamenti o sezioni, diremo che Γ è *connessa fra O ed A*. Se poi la classe Γ è chiusa rispetto a sè stessa e rispetto a tutte le sezioni delle sue sottoclassi, le quali sezioni cadano fra i limiti O e A, diremo che Γ è *chiusa fra quei limiti*. Se Γ fra quei limiti è chiusa e connessa, la diremo *continua fra O ed A* (2).

49. L'aver mostrato che, se in una classe chiusa i limiti di qualche sezione di una sottoclasse sono infiniti, la classe non è connessa, conduce a domandarci se, viceversa, quando in una classe chiusa si sa che i limiti di tutte le sezioni di tutte le sottoclassi sono unici, si possa concludere che la classe è connessa, nel qual caso, essendo già chiusa, sarebbe continua. Si può mostrare che ciò non è.

Un esempio è dato dalla classe Γ, evidentemente non connessa, degli ordini di infinitesimo di x^m (dove m prende tutti i valori reali positivi compreso lo zero), e di quelli di $\left(a^{-\frac{1}{x}}\right)^n x^m$ $(a > 1)$ (dove m prende tutti

(1) Cf. Stolz. Opera e memoria citate. — Le sue definizioni ci sembra peraltro che abbiano qualche inesattezza.

(2) Il nostro concetto di classe continua fra O e A ci sembra corrispondere al concetto di «continuo» di Cantor (Math. Ann. Bd XXI), giacchè egli chiama continuo un sistema π di punti (numeri) perfetto e concatenato. Questa concatenazione consiste in questo: che se P e Q sono due grandezze del sistema π e $P < Q$, data una grandezza qualunque D di π, deve trovarsi un numero finito di grandezze $R_1, R_2, \dots R_n$ di π, tali che le divergenze $D(R_1, P)$, $D(R_2, R_1), \dots D(Q, R_n)$ siano tutte $< D$: e questa condizione ci sembra che conduca alla connessione del sistema, intesa nel nostro senso.

quanti i valori reali positivi e negativi compreso lo zero, ed n tutti i valori positivi reali, escluso lo zero). Le sezioni delle sottoclassi di questa classe hanno un limite ed uno solo, come facilmente si verifica.

Classi di 1.ª specie. — 50. Una proprietà importante delle classi che non posseggono salti, cioè delle classi connesse (in particolare continue) o di quelle limitate che posseggono sole successioni, è quella che le loro grandezze soddisfano alla seguente condizione:

" Prese due grandezze A e B della classe, vi è sempre nella classe stessa " una multipla di B che è maggiore di A, tranne, s'intende, se $B = 0$ od $A = \Omega$ " (1).

Lo Stolz indica col nome di *Postulato d'Archimede* quello che per una classe di grandezze enuncia la proprietà precedente.

Per dimostrarla, costruiamo la serie delle infinite multiple di B,

$$B,\ S(B, B),\ S(B, B, B) \ldots\ldots\ S(B, B, \ldots B) = mB \text{ ecc.},$$

le quali sono tutte grandezze della classe data Γ. Se supponiamo che si mantengano tutte minori della grandezza A della classe stessa (che non sia la grandezza Ω) allora otteniamo una decomposizione in gruppi della classe ponendo nel primo gruppo $\mathbf{P}_1$ le grandezze minori o eguali a qualche multipla di B, e nel secondo $\mathbf{P}_2$ quelle maggiori di tutte le multiple di B; in $\mathbf{P}_2$ si trova A. Il 1° gruppo $\mathbf{P}_1$ non ha grandezza massima, giacchè, se P_1 è una sua grandezza, essa sarà $\leq mB$, ed allora la grandezza $S(P_1, B)$ è $> P_1$ ed è di $\mathbf{P}_1$, essendo $\leq (m+1)B$. Allora, avendo supposto Γ priva di salti, questi gruppi corrisponderanno ad un collegamento o ad una sezione. Se Γ è classe limitata non può avere nè l'uno nè l'altra, quindi è impossibile la decomposizione proposta: e siccome esistono grandezze capaci di far parte di $\mathbf{P}_1$, non ne esisteranno di quelle capaci di stare in $\mathbf{P}_2$, ed il teorema è dimostrato. Se la classe è illimitata, potremo avere un collegamento od una sezione. Nel 1° caso, essendo $\mathbf{P}_1$ senza grandezza massima, avrà $\mathbf{P}_2$ una grandezza minima C, e sarà $C > mB$, qualunque sia il simbolo di moltiplicità m. Ma $D(C, B)$ dev'essere della classe Γ e sarà grandezza di $\mathbf{P}_1$; onde sarà $D(C, B) < mB$, con un m conveniente, talchè $C < S(mB, B)$, ossia C minore di una multipla di B, contro l'ipotesi. Nel 2° caso $\mathbf{P}_1$ non ha grandezza minima; ma appartenendo esso ad una sezione, le divergenze $D(P_2, P_1)$ divengono mi-

(1) Cfr. Stolz. Op. cit., nella quale egli dimostra il teorema per le sole classi continue.

nori di qualunque grandezza di Γ, e in particolare anche di B. Se P_2' e P_1' sono quindi tali che $D(P_2', P_1') < B$, avremo che $D(P_2', B) < P_1$, e quindi $D(P_2', B)$ è una grandezza di $\mathbf{P}_1$ e perciò è minore di qualche multipla m B di B, cioè $D(P_2', B) < m B$: talchè $P_2' < S(m B, B)$, contro l'ipotesi che P_2' sia di $\mathbf{P}_2$ e quindi sia maggiore di tutte le multiple di B. In ogni caso si giunge ad un assurdo; quindi A non è maggiore di tutte le multiple di B, come era da dimostrarsi.

51. Questo teorema mostra in particolare che in una classe limitata e senza salti, le multiple della grandezza limitatrice U giungono a superare qualunque grandezza; onde la classe, dovendo esser propria, non può esser composta che della grandezza modulo, della grandezza U e delle infinite multiple di questa (§ 33). Infatti qualunque grandezza C di essa è minore di una multipla di U, e quindi si deve avere, con m conveniente,

$$m\,U \leqq C < (m+1)\,U$$

dove può essere $m\,U = 0$. E dovrà essere $C = m\,U$, altrimenti la divergenza $D(C, m\,U)$ dovrebbe esser minore di U e non esisterebbe quindi nella classe.

In tal caso le classi limitate si diranno più specialmente classi *discrete*.

52. Il teorema del § 50 ammette il reciproco, cioè:

" Le classi di grandezze che obbediscono al postulato d'Archimede non " possono contener salti „.

Infatti, se esistesse una divisione in gruppi $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ che appartenesse ad un salto, le divergenze fra le grandezze P_2 e P_1 rispettivamente di questi gruppi dovrebbero mantenersi maggiori di una grandezza M della classe. Sarebbe quindi $S(P_1, M)$ una grandezza essa pure di $\mathbf{P}_1$, quindi lo sarebbe anche $S(S(P_1, M), M) = S(P_1, M, M)$ ecc., e così in generale $S(P_1, m\,M)$, con m simbolo di moltiplicità qualunque. Sarà quindi $S(P_1, m\,M) < P_2$ e perciò a maggior ragione $m\,M < P_2$ qualunque sia la multipla di M, contro l'ipotesi, essendo M e P_2 ambedue grandezze della classe.

Possiamo quindi dire che la condizione della mancanza di salti in una classe e del soddisfare al Postulato d'Archimede sono equivalenti.

Se ne conclude che una classe è continua quando è illimitata e chiusa, e soddisfa al Postulato d'Archimede.

53. Un'altra proprietà delle classi illimitate che soddisfano al Postulato d'Archimede, ossia delle classi connesse, è la seguente:

" Se una classe Γ è connessa, le sue sottoclassi illimitate Π devono con-
" tenere grandezze minori di qualunque grandezza di Γ ".

E infatti, se tutte le grandezze P di Π fossero maggiori di una certa grandezza E di Γ, dovrebbero esser maggiori anche di S (E, E), S (E, E, E) ecc. Poichè, se tutte le P non fossero > S (E, E), allora esisterebbe una grandezza P_1 di Π minore od uguale a S (E, E). Essendo Π illimitata, esisterebbe in essa una grandezza $P'_1 < P_1$: e poichè $P_1 \leqq S(E, E)$ e, per le ipotesi fatte su tutte le P, è $P'_1 > E$, avremmo $D(P_1, P'_1) < E$, il che fa contro l'ipotesi, essendo $D(P_1, P'_1)$ una grandezza di Π. Del pari devono tutte le P essere > S (E, E, E), giacchè altrimenti, se esistesse $P_1 \leqq S(E, E, E)$, una grandezza $P'_1 < P_1$ sarebbe > S (E, E) e quindi $D(P_1, P'_1) < E$, contro l'ipotesi ec. Ma allora tutte le P devono esser maggiori di qualunque multipla di E, il che fa contro l'ipotesi, essendo B ed E grandezze tutte di Γ.

Da questo teorema si conclude che se in una classe illimitata Γ si arriva a trovare una sottoclasse pure illimitata Π le cui grandezze siano tutte maggiori di una grandezza di Γ, la Π potrà, considerata isolata, esser connessa, ed anche continua; ma Γ non è continua, e neppure connessa.

54. Distingueremo d'ora in là le classi in *classi di 1ª specie* e *di 2ª specie,* secondochè soddisfano o no al Postulato d'Archimede, cioè secondochè non posseggono salti oppure li posseggono.

Sono di 1ª specie le classi continue, tutte, in generale, le classi connesse, e le classi limitate che contengono solo le multiple di una medesima grandezza (oltre O ed Ω), cioè le classi discrete.

Le classi connesse in cui di ogni grandezza esiste la summultipla $\frac{M}{p}$, qualunque sia p, sono quelle che il Du Bois Reymond chiama *lineari* nella sua opera " *Die Allgemeine Functionentheorie* " (1).

55. Dimostriamo ora un teorema, che permette talvolta di giudicare più facilmente la specie di una classe.

" Se si hanno due classi Γ e Γ' e si possono far corrispondere le loro gran-
" dezze univocamente, in modo che se A_1, A_2 sono due grandezze qualunque

(1) Anche per le classi improprie, se si considerano classi che non contengono salti, tenendo conto del significato più esteso che ha questa parola nelle classi improprie, si dimostra, come si è fatto per le classi proprie, che esse soddisfano al Postulato d'Archimede, e che, viceversa, le classi che soddisfano a questo postulato non posseggono salti. Potremmo quindi parlare anche di classi improprie di 1ª e 2ª specie.

" di Γ, e B_1, B_2 le corrispondenti di Γ', se è $A_1 \gtreqless A_2$, sia anche insieme $B_1 \gtreqless B_2$ " (e quindi anche viceversa) e di più ad $S(A_1, A_2)$ corrisponda sempre in Γ' " o $S(B_1, B_2)$ o una grandezza minore di questa, allora, se Γ è di prima " specie, è di prima specie anche Γ' ".

Siano infatti X', Y' due grandezze di Γ' ed X, Y le corrispondenti di Γ. Se $X' < Y'$, sarà, secondo l'ipotesi, $X < Y$. Ma, ancora per ipotesi, esiste $Z = mX$, tale che $Z > Y$. Prendo allora Z' multipla di X' come Z lo è di X, cioè $Z' = mX'$. Se A' è la grandezza di Γ' corrispondente a Z, sarà, a causa delle ipotesi fatte, $A' \leqq Z'$, poichè $Z' = S(X', X', \ldots X')$, $Z = S(X, X, \ldots X)$: onde, giacchè $Z > Y$ e A' corrisponde a Z, Y' ad Y (per cui anche $A' > Y'$) sarà, a maggior ragione, $Z' > Y'$; quindi esisterà una multipla Z' di X' maggiore di Y'. Ed essendo X' ed Y' qualunque in Γ', la classe Γ' sarà di 1ª specie.

Siamo nelle condizioni espresse nel teorema precedente quando per la classe Γ prendiamo quella di tutti i segmenti e per Γ' quella di tutti gli angoli, ponendo (per stabilire la corrispondenza) i segmenti tutti su una medesima retta, in un medesimo senso, a partire da un medesimo punto O, e gli angoli tutti col vertice comune ed un lato comune perpendicolare nel punto O alla retta dei segmenti, dimodochè ad ogni angolo acuto che ha quel lato e quel senso corrisponde un segmento, e viceversa. — In questo modo, a dire il vero, si pongono in corrispondenza con tutti i segmenti soltanto tutti gli angoli acuti; ma il ragionamento precedente si applica anche alla classe dei segmenti ed alla categoria degli angoli acuti, e dalle sue conclusioni facilmente si deduce che la classe di tutti gli angoli è di 1ª specie (¹). Sono nella condizione del teorema i circoli concentrici (classe Γ o Γ') e i coni retti che hanno un medesimo vertice e questi circoli per base (classe Γ' o Γ); in essi ad $S(A_1, A_2)$ corrisponde $S(B_1, B_2)$ e viceversa. Così dicasi di tutte le sfere (supposto di portarle ad esser concentriche) (classe Γ o Γ') e tutti i cilindri che hanno l'altezza uguale al diametro della base (classe Γ' o Γ) supposto di portarli circoscritti alle sfere ecc. ecc.

56. Per le classi di 1ª specie risultano evidenti le seguenti proprietà:

1° " Date due grandezze A e B, se della prima esistono tutte le possibili summultiple, è sempre possibile trovarne una minore di B. "

(¹) Cfr. De Paolis. Elementi di Geometria § 352.

2° " Le multiple successive di una grandezza formano una serie *indefinitamente* crescente, cioè i cui termini giungono a superare qualunque " grandezza della classe. „

3° " Le successive summultiple di una grandezza formano una serie di " grandezze decrescenti *indefinitamente*, cioè che divengono minori di qualunque grandezza della classe. „

4° " Date due grandezze A e B, se A è minore di B e non è sua multipla, possiamo sempre trovare due multiple consecutive di B, cioè m B, " S (m B, B) = $(m+1)$ B, tali che A sia compreso fra esse, cioè che

$$mB < A < (m+1)\,B. \text{„}$$

5° " Date due grandezze A e B, se A > B ed A è divisibile comunque in " parti uguali, e B non è summultipla di A, possiamo sempre trovare due " summultiple consecutive di A, tali che B sia compreso fra esse, cioè tali che

$$\frac{A}{m} > B > \frac{A}{m+1} \,.\text{„}$$

57. Abbiamo dimostrato in generale che in ogni classe esistono tutte le multiple di qualunque grandezza (§ 26).

Per le classi continue si dimostra che esiste anche qualunque summultipla, cioè che:

" Data $x = \frac{X}{p}$ (essendo x, X grandezze omogenee anche di altra classe) " esiste sempre, per ogni grandezza A della classe data continua Γ, una gran" dezza $a = \frac{A}{p}$, tale cioè che a *sm* A :: x *sm* X, e ne esiste una sola .„

Infatti, notiamo anzitutto che, in qualunque classe illimitata, se B è una grandezza, ne esiste sempre un'altra b tale che $pb < B$, essendo p un simbolo di moltiplicità qualunque dato in precedenza, in particolare quello per cui $x = \frac{X}{p}$. Basta infatti prendere alcune grandezze

$$B_p < B_{p-1} < \ldots B_2 < B_1 \,,$$

(precisamente tante quante grandezze x sono in X) tutte minori di B: essendo allora:

$$B = S\Big(D(B, B_1),\ D(B_1, B_2),\ D(B_2, B_3), \ldots D(B_{m-1}, B_m), B_m\Big),$$

se b è la minima delle grandezze

$$D(B, B_1), D(B_1, B_2), \ldots\ldots D(B_{m-1}, B_m), B_m$$

quando queste non sono tutte uguali, o è una di esse, se sono tutte uguali, evidentemente sarà $B \geqq S(b, b, b, \ldots)$ cioè $B \geqq p\,b$, per cui, se $b' < b$, sarà certamente $pb' < B$.

Ciò posto, osserviamo che esistono grandezze le cui multiple secondo il simbolo p sono minori di A, come si è mostrato ora, ed anche grandezze le cui multiple secondo p sono maggiori di A (almeno A stesso e tutte le grandezze $>$ A). Se supponiamo che non esista la grandezza cercata la cui multipla secondo p è uguale ad A, potremo decomporre le grandezze di Γ in due gruppi, ponendo nel primo quelle le cui multiple secondo p sono $<$ A, nel secondo quelle di cui le multiple secondo p sono $>$ A. I due gruppi danno uno spezzamento, giacchè se P_1 è del primo gruppo, lo è anche $S(P_1, Y_1)$, dove Y_1 è tale che $p\,Y_1 < D(A, p\,P_1)$ condizione che, come si è mostrato, può essere sodisfatta; del pari, se P_2 è del secondo gruppo, lo è anche $D(P_2, Y_2)$, dove Y_2 è tale che $p\,Y_2 < D(p\,P_2, A)$. Ma Γ è continua, nè può perciò ammettere spezzamenti: deve quindi esistere la grandezza a cercata, tale che $p\,a = A$.

Che di grandezze summultiple secondo p la A non ne ammetta che una, è conseguenza immediata del teorema 2° del § 26.

Il teorema precedente è dimostrato vero per le grandezze di classi continue; ma non si esclude che possa valere per altre classi. Vi sono, per es., le classi che studieremo col nome di classi razionali, per ciascuna delle cui grandezze esiste la summultipla secondo un simbolo p qualunque.

Classi di 2ª specie. — 58. Passiamo ora a studiare le classi di 2ª specie. In esse non deve esser vero, in generale, il postulato d'Archimede, e quindi deve esistere almeno una coppia di grandezze A e B ($A < B$) tale che nessuna delle infinite multiple di A uguagli o superi B, ma tutte ne siano sempre minori, dimodochè si abbia $m\,A < B$ qualunque sia m. Evidentemente, allora le infinite coppie di grandezze A', B', se $A' \leqq A$, $B' \geqq B$, sono ancora nelle medesime condizioni.

Mentre quindi nelle classi di prima specie la serie delle successive multiple di una grandezza qualunque della classe va indefinitamente crescendo (§ 56, 2°), nel senso che esse possono superare qualunque grandezza della classe, in quelle di 2ª specie, almeno per certe grandezze, va crescendo, ma

non indefinitamente, in modo che esse restano sempre minori di determinate grandezze della classe.

59. Per studiare la costituzione delle classi di 2ª specie, nelle quali devono esistere grandezze le cui multiple non vanno indefinitamente crescendo, supponiamo che ve ne esistano anche di quelle le cui multiple vanno indefinitamente crescendo. Se poniamo le prime in una categoria, le seconde in un' altra, ogni grandezza deve necessariamente appartenere all' una od all'altra; di più, se A è una grandezza della 1ª, tale è ogni grandezza $A_1 < A$, se B è della 2ª, tale è ogni $B_1 > B$. Quindi si ottiene una divisione della classe in gruppi $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$. Il gruppo $\mathbf{P}_1$ non ha grandezza massima; giacchè, se questa fosse P, la grandezza S (P, P) dovrebbe, essendo > P, appartenere a $\mathbf{P}_2$, mentre le sue multiple sono anche multiple di P, e quindi non crescono indefinitamente. Così pure $\mathbf{P}_2$ non ammette grandezza minima; giacchè, se questa fosse Q, sarebbe Q > A (con A grandezza qualunque di $\mathbf{P}_1$), e allora D (Q, A) = C < Q sarebbe di $\mathbf{P}_1$, e le multiple m C non crescerebbero indefinitamente: e poichè lo stesso è delle multiple di A, così avverrebbe anche delle multiple di S (C, A), cioè di Q, contro l'ipotesi che Q sia di $\mathbf{P}_2$.

Ne viene che i gruppi $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ appartengono ad uno spezzamento. Di più questo spezzamento è un salto; giacchè, se fosse una sezione, e P_1, P_2 fossero grandezze rispettivamente di $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$, dovrebbe D (P_2, P_1) divenire minore di qualunque grandezza della classe e quindi in particolare di una grandezza P di $\mathbf{P}_1$. Ma essendo, con P_1 e P_2 convenienti, D $(P_2, P_1) < P$ e quindi $P_2 <$ S (P_1, P), siccome le multiple di P_1 e quelle di P non vanno indefinitamente crescendo e $m P_2 <$ S$(m P_1, m P)$, non crescerebbero indefinitamente nemmeno le multiple di P_2, contro l' ipotesi che P_2 sia di $\mathbf{P}_2$. Quindi la divisione in gruppi appartiene ad un salto, e l'ampiezza del salto è maggiore di qualunque grandezza di $\mathbf{P}_1$.

Se A′, A″ sono due grandezze di $\mathbf{P}_1$, non crescono indefinitamente nè le multiple dell'una nè le multiple dell'altra, e quindi neppure quelle della loro risultante S (A′, A″). La grandezza S (A′, A″) è quindi essa pure di $\mathbf{P}_1$. Del pari è chiaro che se B′, B″ sono grandezze di $\mathbf{P}_2$, così è anche di S (B′, B″). I due gruppi $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ costituiscono quindi ciascuno da per sè una classe, che è sottoclasse della classe data Γ. La classe $\mathbf{P}_1$ è anche propria; quanto alla $\mathbf{P}_2$, vedremo in seguito che cosa deve concludersi. La classe $\mathbf{P}_2$ è illimitata, la $\mathbf{P}_1$ è limitata o no, secondochè lo era o no Γ.

Possiamo quindi intanto concludere che le classi di 2ª specie, o sono composte di grandezze tali che la serie delle infinite multiple non è indefinitamente crescente per nessuna di esse, o si spezzano in due classi, una di grandezze le cui multiple vanno indefinitamente crescendo, e che quindi soddisfa al Postulato d' Archimede [1], l' altra in cui la serie delle multiple di ciascuna grandezza resta sempre minore di qualche grandezza della classe totale data.

60. In questo secondo caso prendiamo a considerare la classe $\mathbf{P}_1$. Essa è stata originata dall' insieme delle grandezze le cui multiple non crescono indefinitamente, se considerate nella classe Γ, cioè restano sempre minori di qualche grandezza della classe totale. Ma considerata $\mathbf{P}_1$ da sè, senza più tener conto di $\mathbf{P}_2$, cioè ritenuta $\mathbf{P}_1$ come isolata (nel qual caso tutte le grandezze di $\mathbf{P}_2$, come maggiori di tutte le sue, sono da dirsi uguali alla sua grandezza infinita Ω) può darsi che essa sia di 1ª specie; poichè, sebbene nella classe totale le multiple di una grandezza A di $\mathbf{P}_1$ restassero sempre minori di qualche grandezza della classe, tuttavia, se questa grandezza fosse di $\mathbf{P}_2$, potrebbero le multiple di A superare qualunque grandezza che non fosse di $\mathbf{P}_2$, cioè qualunque grandezza di $\mathbf{P}_1$. Può quindi accadere che la classe $\mathbf{P}_1$, considerata isolata, sia di 1ª specie. Se non lo è, applicando a $\mathbf{P}_1$ i ragionamenti fatti per la classe totale Γ, avremo, o che le multiple di ciascuna delle sue grandezze non crescono indefinitamente, o che essa si spezza in due classi, di cui una $\mathbf{P}_2'$ è illimitata e soddisfa al Postulato d'Archimede, l'altra è nelle condizioni in cui è l'attuale $\mathbf{P}_1$, e può quindi o soddisfare al Postulato stesso, o non soddisfarvi affatto, o spezzarsi anch'essa di nuovo e così via. Proseguendo in tal modo, avverrà o che lo spezzamento possa ripetersi indefinitamente, oppure che venga arrestato perchè anche l' ultima sottoclasse soddisfa al Postulato d'Archimede o perchè non vi soddisfa affatto, nel senso che le multiple di nessuna delle sue grandezze vanno indefinitamente crescendo. Tutte le sottoclassi parziali che così si trovano, eccetto *al più* l' ultima, se questa esiste, soddisfano, considerate isolate, al Postulato d'Archimede.

Prendiamo a considerare una di queste sottoclassi Π che non sia l'ultima. (Ricordiamo che l'ultima è necessariamente propria, tale essendo la

[1] Non la chiamiamo di 1ª specie, non avendo ancora giudicato se è propria o impropria.

classe totale Γ). Esisteranno allora nella classe Γ grandezze (quelle delle sottoclassi successive) minori di tutte le grandezze di Π, e, se Π non è la 1ª sottoclasse, anche grandezze maggiori di tutte le sue. Prese in Π due grandezze disuguali B_1 e B_2 ($B_1 < B_2$), la loro divergenza D (B_2, B_1) deve esistere in Γ, che è propria, e dev'essere $< B_2$; sarà quindi questa divergenza o una grandezza di Π, o una grandezza minore di tutte quelle di Π. Se la classe Π si considera come isolata, allora le grandezze minori di tutte le sue sono uguali alla sua grandezza modulo: e la divergenza D (B_2, B_1), se non è una grandezza di Π, dev'essere la grandezza modulo di Π, ed esiste quindi sempre nella classe.

La classe Π, considerata isolata, è perciò propria: soddisfacendo al Postulato d'Archimede, sarà quindi di 1ª specie. Se B è una grandezza di questa classe, b una grandezza delle sottoclassi successive, minore quindi di tutte quelle di Π, la grandezza S (B, b) è pure di Π, e così pure l'altra D (B, b); ma se si considera Π come isolata, e quindi $b = 0$, dovremo considerare S (B, b) $=$ B $=$ D (B, b), qualunque sia la b; onde, quando la Π originaria si considera come isolata, attorno ad ogni sua grandezza si forma un gruppo d'infinite altre da considerarsi tutte uguali fra loro.

Questa classe, che, isolata, è di 1ª specie, se si considera nella classe totale, pure obbedendo al Postulato d'Archimede, possiede infiniti salti. Ciò dipende dal fatto che essa è impropria. Ed è impropria, perchè se B è una sua grandezza, b una di sottoclassi successive (cioè composte di grandezze minori), C $=$ S (B, b) è una grandezza pure di Π; allora D (C, B) $= b$ non esiste in essa.

La sottoclasse Π nella classe totale è necessariamente illimitata; ma, considerata isolata, può anche essere limitata.

61. Dopo tutto ciò, possiamo ora concludere che, se le classi di 2ª specie, le quali non si possono decomporre nel modo anzidetto, e sono quindi tali che le multiple di ognuna delle loro grandezze crescono indefinitamente, si dicono classi di 2ª specie *assolute*, le classi (proprie) di grandezze sono necessariamente di una delle seguenti categorie:

1° o sono di 1ª specie;

2° o sono di 2ª specie assolute;

3° o si spezzano in n classi le quali tutte, considerate isolate, sono di 1ª specie;

4° o si spezzano in n classi di cui le prime (n-1), considerate isolate, sono di 1ª specie, e l'ultima è assoluta;

5° o finalmente, con un procedimento che non ha termine, si spezzano in un numero infinito di classi, le quali, considerate come isolate, sono di 1ª specie.

Le ultime 4 categorie sono tutte di classi di 2ª specie. Possiamo quindi dire che ogni classe di 2ª specie non assoluta si può decomporre sempre in sottoclassi, delle quali, considerate come isolate, al più una è di seconda specie. Queste sottoclassi si diranno *sottoclassi principali* delle classi di 2ª specie. Intenderemo sempre, per maggior chiarezza, disposte le diverse sottoclassi in ordine decrescente, in modo che, se una classe precede un'altra, le grandezze della prima siano maggiori di quelle della seconda. Allora la sottoclasse che, al più, è di 2ª specie, è l'ultima.

Le classi della 3ª categoria si decompongono in n sottoclassi, che, isolate, sono tutte di 1ª specie. L'ultima sottoclasse è una classe senza salti; le altre, considerate non isolate, contengono dei salti; ciascuna loro grandezza A individua un gruppo di grandezze D (A, E), A, S (A, E) dove E indica tutte le grandezze dell'ultima sottoclasse principale, nell'interno del qual gruppo non vi sono salti; ma esso gruppo è aderente a due salti, in modo che, se $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ sono i gruppi che generano uno dei salti, $\mathbf{P}_1'$ e $\mathbf{P}_2'$ quelli che generano l'altro, il gruppo di grandezze indicato fa parte di $\mathbf{P}_1$ e di $\mathbf{P}_2'$.

62. Occupiamoci delle classi di 2ª specie assolute.

Se Γ è una di esse, presa una sua grandezza qualunque A, deve esisistere in Γ una grandezza M (e quindi tutte le $M_1 > M$) maggiore di tutte le multiple di A. Esistono peraltro nella classe anche grandezze N (e quindi anche tutte le loro minori) che sono minori di *qualche* multipla di A, per es. le grandezze A, S(A, A), ... m A, ... Allora, siccome ogni grandezza di Γ deve essere o maggiore di tutte le multiple di A, oppure no (cioè minore di qualche multipla), e se M, N sono grandezze rispettivamente delle due specie, ogni $M' > M$, o $N' < N$ è pure della stessa specie, le grandezze della classe danno una divisione in gruppi $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$, dei quali il primo contiene tutte le grandezze minori di qualcuna delle multiple di A, il secondo quelle maggiori di tutte. — Dico intanto che questa divisione in gruppi appartiene a uno spezzamento di Γ. E infatti $\mathbf{P}_2$ non ha grandezza minima; giacchè, se questa fosse C, allora

$D(C, A) = N$ sarebbe di $\mathbf{P}_1$: e perchè $C = S(A, N)$ e quindi $m\,C = S(m\,A, m\,N)$, ed essendo A ed N di $\mathbf{P}_1$ avremmo $m\,A$ e $m\,N$ minori di qualche multipla di A, tale sarebbe anche $m\,C$, e apparterrebbe C a $\mathbf{P}_1$, contro l'ipotesi. Del pari, $\mathbf{P}_1$ non ha grandezza massima; giacchè, se essa fosse C, sarebbe minore di qualche multipla di A e tale sarebbe quindi $S(C, A)$ la quale apparterrebbe perciò a $\mathbf{P}_1$, mentre, essendo C la grandezza massima di $\mathbf{P}_1$, la $S(C, A)$ deve essere di $\mathbf{P}_2$. — Si ha quindi uno spezzamento, che dico essere un salto. Infatti, se fosse una sezione, le divergenze $D(P_2, P_1)$ fra le grandezze di $\mathbf{P}_2$ e quelle di $\mathbf{P}_1$ dovrebbero divenire minori di qualunque grandezza di Γ e in particolare di una grandezza qualunque P di $\mathbf{P}_1$. Siano P_1' e P_2' due grandezze rispettivamente di $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$, tali che $D(P_2', P_1') < P$: sarà $P_2' < S(P_1', P)$. Ma P_1' e P sono minori di qualche multipla di A, quindi tale è anche $S(P_1', P)$, e perciò essa, e a maggior ragione P_2', saranno di $\mathbf{P}_1$ contro l'ipotesi. — Quella divisione in gruppi corrisponde quindi ad un salto, e l'ampiezza di questo salto è maggiore di qualunque grandezza del gruppo $\mathbf{P}_1$. I due gruppi $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ formano chiaramente ciascuno da sè una classe.

Si può intanto concludere che ogni classe assoluta Γ è tale, che, presa una sua grandezza qualunque A, la classe si decompone in due sottoclassi separate $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$, la prima composta di grandezze tutte minori di qualche multipla di A, l'altra di grandezze maggiori di qualunque multipla di A: e le grandezze di questa 2ª classe sono divergenti da ciascuna di quelle della prima per più di una multipla qualunque di A.

63. Nella sottoclasse ora considerata $\mathbf{P}_1$ rispetto alla grandezza A, possiamo domandarci se tutte le grandezze siano tali che qualche loro multipla superi A oppure no. Le prime esistono certamente; supponiamo che esistano le seconde, e dividiamo la classe $\mathbf{P}_1$ in due gruppi, ponendo nel primo $\mathbf{P}_1'$ tutte le grandezze di $\mathbf{P}_1$, le cui multiple secondo qualunque simbolo di moltiplicità sono minori di A, e nel secondo $\mathbf{P}_1''$ le altre, le cui multiple giungono a superare A. Dovendo una grandezza di $\mathbf{P}_1$ appartenere necessariamente a $\mathbf{P}_1'$ o a $\mathbf{P}_1''$, si ottiene così una divisione in gruppi, che dico essere uno spezzamento. Infatti, se $\mathbf{P}_1'$ ammettesse una grandezza massima X, la grandezza $S(X, X) = 2\,X$ dovrebbe essere di $\mathbf{P}_1''$; ma ciò non è, perchè le sue mnltiple sono anche multiple di X, e quindi sono tutte $<$A. Parimente, $\mathbf{P}_1''$ non ha grandezza minima. Infatti, se questa fosse Y, esisterebbero in Γ delle gran-

dezze $< \mathrm{Y}$, essendosi supposto esistere il gruppo $\mathbf{P}_1'$, e quindi potremmo decomporre Y in due parti qualunque M ed N, delle quali supporremo sia N quella non minore: sarà allora $2\,\mathrm{N} \geqq \mathrm{Y}$. Ma le multiple di Y giungono a superare A, e così quindi sarà a più forte ragione di quelle di 2N, che sono multiple anche di N; questo è impossibile, essendo $\mathrm{N} < \mathrm{Y}$ e quindi appartenendo N a $\mathbf{P}_1'$. La divisione in gruppi conduce quindi ad uno spezzamento. Di più se, indicando P_1' e P_2' convenienti grandezze rispettivamente di $\mathbf{P}_1'$ e $\mathbf{P}_1''$, le divergenze $\mathrm{D}(\mathrm{P}_2', \mathrm{P}_1')$ potessero divenire minori di qualche grandezza P di $\mathbf{P}_1'$, avremmo $\mathrm{P}_2' < \mathrm{S}(\mathrm{P}_1', \mathrm{P})$. Ora le multiple di P_1' e quelle di P essendo minori di A, lo saranno anche quelle di $\mathrm{S}(\mathrm{P}_1', \mathrm{P})$. Infatti, se delle grandezze P_1' e P la P sia quella non minore, sarà $\mathrm{S}(\mathrm{P}_1', \mathrm{P}) \leqq 2\,\mathrm{P}$, onde le multiple di $\mathrm{S}(\mathrm{P}_1', \mathrm{P})$ saranno minori o uguali alle equimultiple di 2 P, cioè a certe multiple di P. Allora $\mathrm{S}(\mathrm{P}_1', \mathrm{P})$ sarebbe di $\mathbf{P}_1'$ e perciò lo sarebbe anche P_2', contro l'ipotesi. Ne viene che i due gruppi $\mathbf{P}_1'$ e $\mathbf{P}_1''$ determinano un salto, la cui ampiezza è maggiore di qualunque grandezza di $\mathbf{P}_1'$.

Si conclude quindi che o $\mathbf{P}_1'$ non esiste, nel qual caso tutte le grandezze di $\mathbf{P}_1$ (e, può dirsi, in generale tutte le grandezze di Γ) hanno delle multiple che superano A, oppure esiste, e dà origine ad un salto, di ampiezza maggiore di tutte le sue grandezze.

I due gruppi $\mathbf{P}_1'$ e $\mathbf{P}_1''$ formano ciascuno chiaramente una classe.

64. Riunendo insieme i resultati ottenuti, si ha che, data una classe assoluta e presa in essa una grandezza A, la classe si decompone in tre sottoclassi separate, che possiamo indicare rispettivamente con (a), (A), (A'); la classe (A) è composta di grandezze che sono minori di qualche multipla di A e tali che le loro multiple giungono a superare A, in modo cioè da poter porre, se M è una grandezza di (A) e p ed m sono convenienti simboli di moltiplicità,

$$p\,\mathrm{A} \leqq m\,\mathrm{M} < (p+1)\,\mathrm{A}:$$

la classe (A') è composta di grandezze tutte maggiori di qualunque multipla di A, e la classe (a) di grandezze le cui multiple sono tutte minori di A. La classe (a) può mancare. Le grandezze di (a) sono tutte minori di quelle di (A) e queste di quelle di (A'). Le classi sono separate l'una dall'altra da salti ciascuno di ampiezza maggiore di tutte le grandezze della classe di sinistra. Finchè si considerano nella classe totale Γ, la classe (A') è illimi-

tata, e la classe (A) è pure illimitata, se esiste (a), non avendo grandezza minima; la classe (a), o la (A) (quando (a) non esiste) possono essere limitate o illimitate.

65. È importante osservare che se la classe data assoluta Γ si decompone nelle sue tre sottoclassi, non più rispetto ad A, ma rispetto ad un' altra grandezza qualunque della sottoclasse (A), le tre sottoclassi risultano le stesse (a), (A), (A'). Infatti, se M è questa grandezza, poichè, come si è notato, si ha $p\,A \leqq m\,M < (p+1)\,A$, avremo che ogni grandezza maggiore di *qualunque* multipla di A è pure maggiore di qualunque multipla di M e viceversa. Inoltre se le multiple di una grandezza non raggiungono A, non raggiungono M, neppure se $M < A$, giacchè se X fosse tale che $n\,X > M$, sarebbe $m\,(n\,X) > m\,M$, e quindi $m\,(n\,X) > p\,A > A$, contro l'ipotesi. E così, viceversa, le multiple che non raggiungono M non raggiungono nemmeno A. Quindi le grandezze delle classi (a), (A), (A') costruite rispetto alla grandezza A, coincidono colle classi (m), (M), (M') costruite rispetto alle grandezze M della classe (A).

Siccome la sottoclasse intermedia (A) è tale, che le multiple di qualunque sua grandezza N giungono a divenire $> A$, e prendendo una sua grandezza qualunque M la classe (M) corrispondente è sempre la classe (A), e quindi le multiple di qualunque grandezza N di (M), cioè di (A), divengono $> M$, ne viene che in questa sottoclasse prese due grandezze qualunque M ed N, fra le successive multiple di N ve ne sono che superano M; onde la sottoclasse (A) soddisfa al Postulato d'Archimede. Se si considera isolata, si vedrà come precedentemente (cfr. § 60) che è propria, e che sarà quindi anche di 1ª specie. Quando è isolata, può essere limitata o illimitata.

Si conclude che, data una classe assoluta, e considerata una sua grandezza qualunque, questa individua una sottoclasse cui essa appartiene e che, considerata come isolata, è di 1ª specie.

66. Se manca la classe (a), restano le (A) ed (A'), di cui la (A) è di 1ª specie, la (A') di 2ª specie assoluta. Sulla (A') ripetendo le medesime considerazioni, essa di fronte a una sua grandezza B qualunque si decomporrà pure in 3 classi (b), (B), (B'). *Può* avvenire che, per certe grandezze B, la (b) manchi; allora la classe totale data vien decomposta nelle 3 classi (A),(B),(B'), di cui le prime due, considerate isolate, sono di 1ª specie, la 3ª è assoluta. Così proseguendo a decomporre (B') ecc., si vede la *possibilità* di avere una

classe assoluta decomponibile in un numero grande quanto si vuole di classi, le quali, considerate isolate, sono di 1ª specie, ed in un' ultima classe, la maggiore di tutte, la quale è sempre assoluta; non potrà avvenire che si decomponga solo in un numero finito di classi di 1ª specie, giacchè nell'ultima le sue grandezze sarebbero tali che le loro multiple supererebbero qualunque grandezza di essa, e quindi, poichè essa è l'ultima, anche qualunque grandezza della classe data: e ciò è impossibile, essendo questa, per ipotesi, assoluta.

È di questo genere la classe costituita dagli ordini di infinitesimo delle funzioni

$$x^n,\ z_1^{n_1}=\left(a^{-\frac{1}{x}}\right)^{n_1},\ z_2^{n_2}=\left(a^{-\frac{1}{z_1}}\right)^{n_2},\ z_3^{n_3}=\left(a^{-\frac{1}{z_2}}\right)^{n_3}, \ldots z_p^{n_p}=\left(a^{-\frac{1}{z_{p-1}}}\right)^{n_p}, \ldots$$

(essendo $z_1 = a^{-\frac{1}{x}}$, $z_2 = a^{-\frac{1}{z_1}}, \ldots$ ecc., con $a > 1$) e da quelli dei prodotti $x^m z_1^{m_1} z_2^{m_2} \ldots z_{p-1}^{m_{p-1}} z_p^{n_p}$, facendo successivamente $p = 1, 2, 3, \ldots$, dove $n, n_1, n_2, n_3, \ldots$ prendono tutti i valori interi e positivi, ed $m, m_1, m_2, m_3, \ldots$ tutti i valori interi, positivi e negativi. Le sottoclassi principali sono quelle degli ordini d'infinitesimo di x^n, di $x^m\left(a^{-\frac{1}{x}}\right)^{n_1} = x^m z_1^{n_1}$, di $x^m z_1^{m_1} z_2^{n_2}$, ecc.

67. Un esempio importante di classi di 2ª specie assoluta ci è dato dagli ordini d'infinitesimo di *tutte* le funzioni *possibili*, supposto di non volere identificare questi ordini d'infinitesimo a dei numeri. Questa classe è assoluta; giacchè preso un ordine d'infinitesimo qualunque, appartenente, per es., ad una funzione z, l'ordine d'infinitesimo di $a^{-\frac{1}{z}}$ $(a > 1)$ è maggiore di tutti i multipli di quello, essendo l'ordine di $a^{-\frac{1}{z}}$ maggiore degli ordini d'infinitesimo di tutte le funzioni z^n, con n qualunque intero.

Alcune sue sottoclassi, considerate isolate, sono di 1ª specie; per es. quella degli ordini d'infinitesimo di x^n, con n qualunque reale e positivo. Nella classe completa, una grandezza qualunque α, infinitesimo, per es., della funzione z, determina la decomposizione in 3 classi: la classe (A), che è quella degli infinitesimi di z^n (n reale qualunque positivo) e di tutti gl' infinitesimi compresi fra due qualunque di questi; la classe (a) e la (A'), che contengono rispettivamente gli ordini d'infinitesimo minori e maggiori di quelli di (A). In (a) sono compresi, per es., gli ordini di infinitesimo di $\frac{1}{\log z}$, di $\frac{1}{\log \log z}$ ecc.; in (A') quelli di $z_1 = a^{-\frac{1}{z}}$, di $a^{-\frac{1}{z_1}}$ ecc., con $a > 1$. La classe (A), con-

siderata come isolata, è di 1ª specie: il suo isolamento coincide colla condizione che uno qualunque degli ordini di infinitesimo compresi fra due di z^n si ritenga uguale ad uno conveniente di z^n, quelli minori degli ordini d'infinitesimo di qualunque z^n si considerino uguali fra loro e a quelli delle funzioni costanti, e quelli maggiori degli ordini d'infinitesimo di qualunque z^n, ugualifra loro e all' infinito.

68. Dobbiamo ora fare delle importanti distinzioni circa la convergenza delle serie e i limiti nelle classi di 2ª specie, che avremo poi campo di applicare parlando della misura in queste classi.

Supponiamo di avere una classe Γ di 2ª specie la quale si possa decomporre in un numero finito di sottoclassi principali, e quindi: o sia della 3ª fra le categorie segnate al § 61: o, essendo della 4ª, si considerino uguali alla grandezza modulo O le grandezze dell'ultima sottoclasse principale: o, essendo della 5ª, si considerino uguali ad O tutte quelle delle sottoclassi dopo una qualunque di esse, per es. la p^{ma}: o, infine, essendo della 2ª categoria, cioè assoluta, sia una di quelle indicate al § 66, nella quale le grandezze delle sottoclassi principali dopo la p^{ma} si considerino uguali tutte alla grandezza infinita Ω. In ogni caso però, sarà da noi considerata Γ come una sottoclasse isolata (composta di sottoclassi principali) di una classe di 2ª specie. Supporremo le sottoclassi principali ordinate in modo che si considerino prima quelle contenenti grandezze maggiori.

Allora nella classe Γ si costruiscano due serie tali che la divergenza fra i termini dell'una e dell'altra divenga minore di qualunque grandezza assegnabile della sottoclasse principale n^{ma} di Γ, ma non di qualunque grandezza di classi $(n+s)^{me}$. Allora evidentemente quella coppia di serie potrà essere convergente rispetto a sottoclassi Π di Γ, nelle quali compariscano grandezze delle sottoclassi 1^a, 2^a, ... n^{ma}. Diremo che quelle due serie hanno una *convergenza di grado* n^{mo}, e le grandezze limiti, se esistono in Γ, le diremo *limiti di grado* n^{mo}.

Lo stesso dicasi delle sezioni. In generale, se una sottoclasse Π di Γ che ammette una sezione non contiene grandezze delle sottoclassi principali $(n+1)^{ma}$, $(n+2)^{ma}$,.... $(n+s)^{ma}$ ecc., ma le contiene della sottoclasse n^{ma}, le divergenze fra le grandezze dei gruppi che individuano la sezione divengono minori di grandezze della sottoclasse n^{ma} (per la definizione della se-

zione), ma non di quelle delle altre sottoclassi successive, essendo quelle divergenze grandezze di Π (giacchè si considerano solo classi proprie) ed a Π non appartenendo, per ipotesi, grandezze delle sottoclassi $(n+s)^{me}$. Di più, quelle divergenze diverranno minori di *qualunque* grandezza della sottoclasse n^{ma}, giacchè, se consideriamo uguali ad 0 le grandezze delle sottoclassi dopo l'n^{ma}, la n^{ma} diviene di 1ª specie (§ 60), e per le grandezze di Π, che così vengono ad appartenere ad esse, può ripetersi il ragionamento del § 53, le cui conclusioni varranno evidentemente anche quando si ritornino a considerare differenti da 0 le grandezze delle sottoclassi $(n+s)^{me}$. Diremo che *quella sezione è del grado* n^{mo}. Possiamo notare che tutte le sezioni di una sottoclasse Π devono essere del medesimo grado, dovendo le divergenze fra le grandezze dei due gruppi delle sezioni appartenere a Π e divenire minori di tutte le grandezze di Π, che sono allora le medesime per tutte le sezioni. Anche *la sottoclasse* Π si dice *del grado* n^{mo}.

Se la classe Γ si riduce ad una delle sue sottoclassi principali, per es. l'n^{ma}, col supporre questa isolata e quindi uguali alla grandezza modulo tutte le grandezze delle classi $(n+s)^{me}$ ed alla grandezza infinita quelle delle classi 1ª, 2ª, ... $(n-1)^a$, allora non vi ha luogo a parlare che di convergenza e di limite di un grado solo, e si ricade nel caso delle classi di 1ª specie.

69. Una classe Γ, affinchè si dica *chiusa*, deve contenere (§ 43) i limiti di tutte le sezioni di tutte le sue sottoclassi possibili, e quindi di tutte le coppie di serie convergenti che si possono fare in tutte le sue sottoclassi. Se una sottoclasse Π di Γ non contiene grandezze minori di quelle della sottoclasse principale n^{ma}, si è visto (§ 68) che le sezioni della classe Π si dicono di grado n^{mo}, e così pure di grado n^{mo} la convergenza delle serie convergenti che si possono costruire in Π. Anche i limiti, se esistono, si dicono di grado n^{mo}. Ma nella classe data esistono sottoclassi di grado 1°, 2°, 3°, ... n^{mo}, poichè vi sono almeno quelle che si hanno dalle sottoclassi principali, considerando queste come isolate; quindi, affinchè la classe Γ possa dirsi assolutamente chiusa, occorre che contenga tutti i limiti fino al grado più elevato di cui si possa parlare nella classe. Se la classe possiede i limiti di tutte le possibili sezioni di grado r^{mo}, cioè tutti i possibili limiti di grado r^{mo}, diremo che la classe è *chiusa di grado* r^{mo}. Se una classe è chiusa di r^{mo} grado, può non esser chiusa dei gradi $(r-m)^{mo}$ o $(r+p)^{mo}$, come

si intenderà meglio studiando la misura in queste classi; onde, affinchè una classe sia chiusa, è necessario che contenga i limiti di *qualunque* grado pospossibili nella classe.

Se la classe Γ è chiusa del grado r^{mo}, e la sua r^{ma} sottoclasse principale Π_r, considerata isolata, è illimitata, sarà Π_r anche chiusa, semprechè si consideri ancora isolata. Infatti Π_r non può aver sezioni: giacchè, se ne avesse, esse avrebbero un limite in Γ, che per ipotesi è chiusa di grado r, e questo limite dovrebbe essere una grandezza di Π_r, poichè Π_r contiene tutte le grandezze di Γ comprese fra due qualunque di Π_r stessa; in tal caso non vi può essere sezione, esistendo il limite nella classe stessa. Le sottoclassi Π_r' di Π_r, se hanno sezioni, le hannò del grado r (poichè Π_r ri considera isolata) e perciò hanno un limite in Γ e quindi in Π_r. La sottoclasse Π_r è perciò chiusa, se si considera isolata; ma in quest' ultima ipotesi, essendo illimitata, è anche connessa (§ 60), quindi (§ 48) è continua.

Se poi Π_r è limitata, allora, quando è isolata, essendo di 1ª specie, sarà discreta (§ 51).

Capitolo IV.

Le classi ad una dimensione e a due sensi.

Classi a due sensi. — 70. Si definì già (§ 28) classe a due sensi una classe di grandezze ad una dimensione in cui ogni grandezza ha la sua opposta, intendendo per grandezze opposte quelle la cui risultante è la grandezza modulo O. Già si notò che la classe si scompone in due sottoclassi, una di senso superiore, l'altra di senso inferiore; e si accennò che le grandezze diverse da O della prima classe sono tutte > 0, e sono < 0 quelle della seconda. Si deduce subito che una grandezza di senso inferiore è sempre minore di una grandezza qualunque di senso superiore. Se poi A_1', A_2' indicano due grandezze di senso inferiore e $A_1' < A_2'$, e se A_1 e A_2 sono le loro opposte, sarà $S\,(A_1', A_1) = 0$, $S\,(A_2', A_2) = 0$, quindi (§ 25, 9°) $A_1 > A_2$; cioè di due grandezze di senso inferiore è maggiore quella la cui grandezza opposta è minore.

Esaminiamo ora la risultante di due grandezze della classe. Se le gran-

dezze A, B sono di senso superiore, evidentemente è di senso superiore anche la risultante S (A, B); e se A,′ B′ sono di senso inferiore, tale è anche S (A′, B′). Di più, essendo $A' = D(0, A)$, $B' = D(0, B)$, avremo

$$S(A', B') = S\Big(D(0, A),\ D(0, B)\Big) = D\Big(0,\ S(A, B)\Big),$$

e quindi S (A,′ B′) è la grandezza opposta ad S (A, B), cioè alla grandezza che è la risultante delle grandezze opposte a quelle date.

Se le grandezze A, B′ sono la prima di senso superiore, l'altra di senso inferiore, e B′ è opposta alla grandezza B, distinguiamo 3 casi, cioè: $A = B$, $A > B$, $A < B$. Nel 1° caso sarà

$$S(A, B') = S(B, B') = 0.$$

Nel 2° caso, ponendo $D(A, B) = C$, dove C indica evidentemente una grandezza del senso superiore, sarà $A = S(B, C)$, e quindi

$$S(A, B') = S\Big(S(B, C), B'\Big) = C = D(A, B).$$

Nel 3° caso, posto $D(B, A) = C$, ed essendo C′ la grandezza opposta a C, sarà $A = D(B, C)$, e quindi

$$S(A, B') = S\Big(D(B, C), B'\Big) = D\Big(S(B, B'),\ C\Big) = D(0, C) = C',$$

onde S (A, B′) è uguale alla grandezza opposta di D (B, A).

Se quindi, per semplicità di linguaggio, diciamo *stato assoluto* di una grandezza essa stessa, se è di senso superiore, o la sua opposta, se essa è di senso inferiore (per cui lo stato assoluto è sempre una grandezza di senso superiore), può dirsi in ogni caso che la risultante S (A, B′) è una grandezza che è del senso di quella fra le due grandezze A e B′ che ha lo stato assoluto maggiore, ed il suo stato assoluto è uguale alla divergenza fra A e B, o alla divergenza fra B ed A.

Possiamo concludere facilmente che, date due grandezze qualunque e di qualunque senso di una classe a due sensi, avremo che $S(A, B) \gtreqless A$, secondochè B è di senso superiore, o è uguale alla grandezza modulo, o è di senso inferiore.

71. Esaminiamo l'operazione D nelle classi a due sensi. Siano A e B le due grandezze; siccome si osserva che, se B′ è la grandezza opposta a B, si ha $S\Big(B,\ S(A, B')\Big) = S(B, B', A) = A$, così evidentemente S (A, B′) è la di-

vergenza fra A e B: talchè esiste la divergenza fra due grandezze qualunque della classe, non solo se la prima è maggiore od uguale alla seconda, ma anche se ne è minore. Di più, il risultato si ottiene prendendo la risultante della prima grandezza coll' opposta della seconda. Questa risultante potrà essere di un senso o di un altro, secondo i sensi e gli stati assoluti delle due grandezze date. E precisamente, se B ed A hanno il medesimo senso, allora A e B' lo hanno opposto, e quindi la loro risultante sarà la grandezza modulo se $A = B$, mentre invece, se $A \lesseqgtr B$, sarà del senso di A o di quello di B, secondochè sarà maggiore lo stato assoluto di A o quello di B. Se invece B ed A hanno senso opposto, A e B' hanno ambedue il senso di A, e la risultante ha lo stesso senso, e ha per stato assoluto la risultante degli stati assoluti.

Si conclude quindi che ogni classe a due sensi è una classe propria, giacchè le divergenze si riducono in ogni caso a risultanti, e queste devono esistere sempre nella classe. Anche la sottoclasse di senso superiore deve evidentemente essere propria.

Distinzione delle classi a due sensi. — 72. Le classi a due sensi si diranno *limitate* o *illimitate*, secondochè tale sia una delle due sottoclassi, per es. quella superiore (e quindi anche l'altra). Se la classe a due sensi sarà limitata, non potrà più dirsi che, all'infuori di 0, ammette una grandezza minima, ma che ammette una grandezza di stato assoluto minimo. Questa può ancora dirsi *grandezza limitatrice*, ma *di senso superiore;* la sua opposta (che è la grandezza limitatrice della sottoclasse inferiore) si dirà *grandezza limitatrice di senso inferiore*. Se la classe è illimitata, non solo non ammette grandezza minima, ma neanche ammette una grandezza di stato assoluto minimo.

Tutti i teoremi enunciati già per le grandezze multiple e summultiple, valgono anche per le grandezze delle classi a due sensi, essendo stati dimostrati in generale. Si noti che le multiple e le summultiple di una grandezza di una classe a due sensi sono del medesimo senso della grandezza stessa.

Nelle classi a due sensi si dovrà far comparire anche la grandezza Ω' opposta di Ω, da definirsi minore di tutte le grandezze della classe. Una classe a due sensi si dirà isolata, quando si consideri tale la sua sottoclasse superiore.

Quanto alle altre distinzioni fatte nelle classi ad un senso ed alle defi-

nizioni di classi connesse, chiuse, continue, di 1ª e 2ª specie, ecc., le faremo anche nelle classi a due sensi, attribuendo quei nomi a queste, quando si possano attribuire alla loro classe superiore e quindi anche a quella inferiore. Sarà solo utile fare le seguenti osservazioni.

Facendo in una classe qualunque a due sensi una divisione in gruppi, potrà avvenire uno di questi casi: 1° la grandezza modulo farà parte del gruppo $\mathbf{P}_1$ o del gruppo $\mathbf{P}_2$ senza esserne rispettivamente la grandezza massima o minima: 2° oppure sarà effettivamente la massima di $\mathbf{P}_1$ o la minima di $\mathbf{P}_2$. Nel 1° caso il gruppo cui non appartiene 0 è composto tutto di grandezze di un certo senso, e di queste ve ne sono alcune (infinite) anche nel gruppo dov'è 0. Allora la divisione in gruppi dà un caso che si ottiene anche con una divisione in gruppi della sottoclasse (superiore o inferiore) che non appartiene intera a $\mathbf{P}_1$ o a $\mathbf{P}_2$. Nel 2° caso (il quale deve essere studiato a parte, perchè non può ridursi a quello delle classi ad un senso, essendo i due gruppi completamente di senso opposto), si vede che vi è una successione o un collegamento secondochè la classe è limitata o illimitata, almeno considerando la classe come isolata, e quindi quella divisione speciale non influisce sulla connessione o sulla chiusura della classe. Se la classe ha degli spezzamenti, questi avvengono quindi in modo che appartengono ad una delle due sottoclassi. Di più tutti gli spezzamenti ed i collegamenti, ecc., di una delle due sottoclassi si trovano anche nell'altra, rispetto a tutte le grandezze opposte a quelle considerate nella prima. Circa al postulato d'Archimede che serve a distinguere le classi in classi di 1ª e di 2ª specie, s'intende che si deve esaminare se vale in ogni sottoclasse, giacchè le multiple di una grandezza appartengono tutte alla sottoclasse di questa, essendo tutte del suo senso: e propriamente esso è da intendersi riferito agli stati assoluti delle grandezze. La decomposizione in sottoclassi principali accennata per le classi ad un senso di 2ª specie, avverrà in ciascuna delle due sottoclassi di una classe di 2ª specie di grandezze a due sensi. Le sottoclassi principali le immagineremo composte ciascuna di una sottoclasse principale presa nella sottoclasse superiore, e di tutte le grandezze opposte, cioè della sottoclasse principale corrispondente nella sottoclasse inferiore.

Capitolo V.

Le classi a più dimensioni.

Le classi a più dimensioni. — 73. Si disse in generale (§ 22) che una classe di grandezze non è ad una dimensione, quando non per tutte le coppie disuguali A e B si può dire se A è maggiore o minore di B. Fra queste classi dicemmo di volerci limitare a considerare quelle in cui vi sia un numero finito *n* di sottoclassi ad una dimensione, tali che tutte le grandezze della classe siano risultanti dell'operazione S eseguita sulle grandezze di una medesima sottoclasse o di sottoclassi diverse.

Queste classi si dissero *classi complesse* o ad *n dimensioni*, chiamando le sottoclassi ad una dimensione ora accennate *sottoclassi elementari.* Nelle classi complesse ogni grandezza che non appartenga ad una sottoclasse elementare è quindi risultante di grandezze prese soltanto dalle sottoclassi elementari, e che possono dirsi *grandezze elementari* della classe.

Le sottoclassi elementari possono essere o tutte limitate, o tutte illimitate, oppure alcune limitate ed altre illimitate. Così possono essere, tutte od in parte, a due sensi, di 1ª specie, continue, di 2ª specie ecc. Se *tutte* le sottoclassi elementari di una classe godono una proprietà che fa loro avere uno di questi nomi, attribuiremo il medesimo nome alla classe totale. Avremo quindi classi complesse limitate, illimitate, di 1ª specie, continue ecc. Ci limiteremo a studiare il caso delle classi complesse di 1ª specie.

Una classe a due dimensioni continua sarebbe, per es., quella formata da tutti i segmenti di un piano, quando questi si dicano uguali o disuguali secondochè abbiano o no uguale lunghezza e direzione, e per risultato dell'operazione S su più segmenti si prenda la risultante (nel senso della Meccanica) dei segmenti uguali e paralleli ad essi, passanti per un medesimo punto. In tal caso le due sottoclassi elementari possono essere quella di tutti i segmenti paralleli ad una certa direzione, e quella dei segmenti paralleli ad una direzione diversa dalla precedente e non opposta ad essa. Le due sottoclassi sarebbero in tal caso continue e a due sensi.

La classe delle grandezze formate da un insieme qualunque di oggetti di *n* specie differenti, dove l'operazione S è quella del porre e considerare insieme più oggetti, è una classe discreta ad *n* dimensioni, in cui sono sot-

toclassi elementari le n classi discrete formate ciascuna di oggetti di una sola specie.

74. Si è detto che in generale ogni grandezza di una classe ad n dimensioni è uguale alla risultante di grandezze delle n sottoclassi elementari. Alcune di queste grandezze (anche fino ad n-1) potranno mancare: allora le sostituiremo colla grandezza modulo, che si ritiene la stessa per tutte le sottoclassi elementari e per la classe totale data. Una grandezza qualunque di una classe ad n dimensioni sarà quindi della forma:

$$M = S\,(M_1,\ M_2,\ldots\ M_n)\,,$$

dove in generale M_r indica una grandezza della r^{ma} sottoclasse elementare e può essere uguale ad O. Le M_r si diranno le *parti elementari* della grandezza M.

È chiaro che se le parti elementari di una grandezza sono rispettivamente uguali a quelle di un'altra, sono uguali le due grandezze; e, per la definizione stessa di grandezze di una classe ad n dimensioni, due grandezze devono dirsi uguali solo quando tali sono rispettivamente le loro parti elementari. Onde la relazione

$$S\,(M_1\,,\ M_2\,,\ldots\ M_n) = S\,(N_1\,,\ N_2\,,\ldots\ N_n)$$

e la serie delle altre

$$M_1 = N_1\,,\ M_2 = N_2\,,\ldots.\ M_n = N_n\,,$$

sono equivalenti.

75. Se A, B, C,... L sono più grandezze, e si ha:

$$A = S\,(A_1, A_2\,,\ldots A_n),\ \ B = S\,(B_1, B_2\,,\ldots B_n)\,,\ldots\ \ L = S\,(L_1, L_2\,,\ldots L_n)\,,$$

sarà

$$S\,(A, B,\ldots L) = S\Big(S(A_1, A_2,\ldots A_n),\ S(B_1, B_2, \ldots B_n),\ldots.\ S\,(L_1, L_2,\ldots L_n)\Big) =$$

$$= S\Big(S(A_1, B_1,\ldots L_1),\ S(A_2, B_2, \ldots. L_2),\ldots\ S\,(A_n, B_n\,,\ldots L_n)\Big)\,.$$

Dunque:

1° " La risultante di più grandezze complesse ha per parti elementari " rispettivamente le risultanti delle parti elementari delle grandezze date. "

Se in particolare $A = B = C = \ldots. = L$, si ha il teorema:

2° " La grandezza multipla di una grandezza ad n dimensioni è la ri- " sultante delle equimultiple delle sue parti elementari. "

Da questo teorema discende subito l'analogo per le summultiple:

3° " La grandezza summultipla (se esiste) di una grandezza complessa " è la risultante delle equisummultiple (se esistono) delle sue parti elementari. „

Questo, pel teorema del § 57, conduce alla conclusione che:

4° " Di ogni grandezza di una classe continua ad n dimensioni esiste " la summultipla secondo un simbolo di moltiplicità qualunque, ed è unica. „

76. " Nelle classi complesse, almeno se le sottoclassi elementari sono " a due sensi, esiste sempre la divergenza fra due grandezze qualunque, ed " è unica. „

Infatti, date le due grandezze

$$A = S(A_1, A_2, \ldots A_n) \ , \ B = S(B_1, B_2, \ldots B_n),$$

la grandezza

$$P = S\Big(D(A_1, B_1), D(A_2, B_2), \ldots D(A_n, B_n)\Big)$$

è tale che $S(B, P) = A$, come si vede subito; quindi P è la divergenza fra A e B. Evidentemente la divergenza è unica.

77. Se prese due serie di grandezze, che indicheremo brevemente così:

$$\Big\{S(A_1, A_2, \ldots A_n)\Big\} \ , \quad \Big\{S(B_1, B_2, \ldots B_n)\Big\},$$

si considerano le coppie di serie formate dalle parti elementari r^{me} di ciascuna grandezza, cioè le coppie di serie $\Big\{A_r\Big\}$, $\Big\{B_r\Big\}$, e si trova che ciascuna è una coppia di serie convergenti aventi rispettivamente per limite C_r, diremo che quelle due serie di grandezze complesse sono *convergenti* ed hanno per *limite* la grandezza $C = S(C_1, C_2, \ldots C_n)$, la quale deve esistere nella classe, essendo risultante di grandezze della classe stessa.

Possiamo quindi dire che nelle classi ad n dimensioni continue, cioè in quelle che hanno continue le sottoclassi elementari, ogni coppia di serie convergenti ammette una grandezza limite ed una sola.

PARTE SECONDA

I NUMERI E LA MISURA

CAPITOLO I.

Il numero in generale.

Il numero in generale. — 78. Data una classe Γ di grandezze (senza porre per essa nessuna condizione) e prese due sue grandezze qualunque A e B, secondochè esse sono uguali o disuguali, diremo che esse hanno *uguali numeri* o *numeri disuguali*. Si osservi che la parola *numero* non è qui definita esplicitamente, nè si cercherà di definirla; ma siccome, date due grandezze qualunque A e B di una classe devono necessariamente essere uguali o disuguali, e siamo quindi sempre in grado di dire quando avviene il fatto che s' indica colle parole " A e B hanno ugual numero „ e quando quello che si indica colle altre " A e B hanno numero disuguale „ ne viene che, collegando ad ogni grandezza di Γ un ente da dirsi numero, considerati due di questi enti, possiamo sempre concludere che deve dirsi che essi sono uguali o disuguali. Questi enti sono quindi per noi grandezze (§ 3).

79. Se A e B sono due grandezze della classe Γ ed α, β i loro numeri, secondochè A è uguale o disuguale a B ($A \gtreqless B$), diremo che α *è uguale* o *disuguale a* β, cioè $\alpha \gtreqless \beta$. E ancora, se, indicando S il simbolo dell'operazione generatrice della classe Γ, ed essendo A, B,.... L, M grandezze di questa classe, $\alpha, \beta, \ldots \lambda$, μ i loro numeri, si abbia S (A, B,... L) = M, collegheremo μ agli enti $\alpha, \beta, \ldots \lambda$, talchè il passaggio da $\alpha, \beta, \ldots. \lambda$ a μ darà un'operazione (§ 5) che prenderemo come operazione S per questi numeri. La diremo *addizione*, e alla risultante μ daremo il nome di *somma* di $\alpha, \beta, \ldots \lambda$: per segno di essa, invece del segno generale S, prenderemo l'altro + interposto fra i simboli dei numeri da addizionare. Scriveremo allora:

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = \mu.$$

I concetti di numeri uguali e disuguali e quello di addizione (operazione S) godono così le proprietà caratteristiche che per essi sogliono darsi in aritmetica, giacchè vi soddisfano i concetti corrispondenti nella classe data Γ di grandezze. Si ha quindi, per es., che l'addizione dei numeri gode la proprietà commutativa ed associativa; e questo, se i numeri sono introdotti in simil modo, risulta perciò un vero teorema.

Dalla definizione di somma discende che la somma di più numeri è di nuovo un numero di quelli introdotti come appartenenti a tutte le grandezze di una classe; di più, i concetti di uguaglianza, di disuguaglianza e di addizione per i numeri, sono stabiliti in modo da soddisfare alle condizioni loro caratteristiche; ne viene che l'insieme di tutti i numeri corrispondenti alle grandezze di una classe Γ costituisce esso pure una classe di grandezze rispetto all'operazione addizione.

In ogni classe di numeri vi sarà un numero modulo che chiameremo *zero* (0). Esso gode della proprietà, che, addizionato con qualunque numero, non lo altera. In ogni classe di numeri vi sarà poi un numero infinito corrispondente a Ω, che indicheremo con ω.

Se α corrisponde ad A e β a B, e B è multiplo di A, diremo β *multiplo* di α e α *summultiplo* di β: B e β saranno chiaramente equimultipli di A e di α.

È evidente che la classe dei numeri appartenenti ad una classe di altre grandezze è limitata od illimitata, secondochè dell'una o dell' altra specie sia la classe delle grandezze [1].

80. Se altro non si aggiungesse circa questo concetto di numero, ogni classe di grandezze avrebbe la sua classe di numeri, e le classi di numeri per differenti classi di grandezze sarebbero differenti. Allora nessun vantaggio si ricaverebbe dall' introduzione del numero, il quale non collegherebbe una classe coll'altra, e servirebbe solo ad esprimere con un'altra frase i teoremi sulle grandezze di una determinata classe; talchè converrebbe identificarlo colla grandezza stessa cui corrisponde, cioè non introdurlo affatto.

---

(1) Potremmo far la teoria del numero anche senza introdurlo come ente, ma definendo solo *le frasi* « due numeri sono uguali, o disuguali, un numero è la somma di più altri ecc. „ e studiando poi le proprietà di queste frasi; ma questo metodo è, in sostanza, precisamente il nostro. In conclusione il nostro *ente* numero (puro concetto) prende origine *soltanto* dalla definizione di quelle frasi, e serve *soltanto* per meglio condurre il ragionamento e fissare l'oggetto del nostro discorso; nello stesso modo che il segmento, definito colla ordinaria definizione della Geometria, agevola lo studio del segmento fatto sulle frasi " due segmenti sono uguali o disuguali ecc. „ come si è detto al § 4.

Cercheremo peraltro di far sì che una sola classe di numeri serva per tutte le classi di grandezze, o almeno per le classi di grandezze di una certa categoria. Ciò si potrà ottenere, facendo in modo che tutte le classi di quella categoria si corrispondano grandezza a grandezza; ma affinchè, se due numeri *a* e *b* si dicono uguali o disuguali rispetto ad una classe, si dicano uguali o disuguali anche rispetto a qualunque altra classe, e, corrispondendo *a* e *b* in una classe alle grandezze A e B, in un'altra ad A′ e B′, sia lo stesso il numero che corrisponde nella prima ad S (A, B) e nella seconda ad S (A′, B′), per poterlo dire *somma* di *a* e *b*, occorrerà che la corrispondenza fra le classi sia stabilita in modo che, se A e B sono due grandezze della prima, A′ e B′ le corrispondenti della seconda, sia sempre $A' \overset{=}{\gtrless} B'$ con $A \overset{=}{\gtrless} B$, e ad S(A, B) corrisponda S (A′, B′) — Se la corrispondenza è stabilita così, potremo collegare il *medesimo* ente numero a tutte le grandezze corrispondenti.

Del modo di stabilire queste corrispondenze e delle classi di numeri che si ottengono, ci andremo occupando nei capitoli seguenti.

Capitolo II.

La corrispondenza metrica nelle classi ad una dimensione di 1ª specie.

Distinzione delle classi dal punto di vista della loro generazione. — 81. Cerchiamo ora di stabilire fra le classi la corrispondenza accennata nel capitolo precedente. Incominciamo dalle classi ad una dimensione, di prima specie, ad un senso.

Sia Γ una classe continua, e se ne consideri una sottoclasse limitata Γ′, la quale essendo pure di 1ª specie, sarà discreta (§ 51), cioè formata dalla grandezza modulo, da una grandezza minore di tutte le altre, che si disse grandezza limitatrice (e che ora, per lo scopo che ci prefiggiamo, ci converrà più chiamare *unità*), dalle successive multiple di questa unità e dalla grandezza infinita Ω. Se quindi U è l'unità della classe, S l'operazione generatrice di Γ, questa sottoclasse sarà composta dalle grandezze

$$O\,,\ U\,,\ S(U\,,\ U)\,,\ S(U\,,\ U\,,\ U)\,,\ldots.\ \Omega\,,$$

e, si sottintende, dalle loro infinite uguali. Evidentemente, in ogni classe continua vi sono infinite di simili classi di grandezze, ottenute partendo da una grandezza qualunque della classe: è chiaro che sono tutte proprie.

Essendo

$$0 < U < S(U, U) < S(U, U, U) < \ldots < \Omega,$$

si può concludere che due grandezze della classe discreta sono uguali quando sono equimultiple dell'unità, e, se non lo sono, la maggiore è quella in cui si trovano tante unità quante sono contenute nell'altra, ed altre ancora.

82. Essendo ora la classe nostra Γ continua, in essa esistono le summultiple secondo qualunque simbolo di moltiplicità di qualunque sua grandezza (§ 57) ed in particolare dell' unità U scelta per la classe Γ'. Costruiamo ora una categoria di grandezze, prendendo tutte le possibili summultiple di U, tutte le loro multiple (fra cui rientrano evidentemente le grandezze tutte della classe discreta Γ'), e la risultante di tutte queste grandezze combinate fra loro in tutti i modi possibili. Tale categoria di grandezze è evidentemente una classe, la quale si dirà *classe razionale.*

Questa classe è di 1ª specie, come sottoclasse di Γ che è di prima specie; di più è illimitata, giacchè (§ 56, 3°) le successive summultiple dell'unità U, che esistono in essa, vanno indefinitamente decrescendo, cioè divengono minori di qualunque grandezza di Γ e quindi anche della sottoclasse razionale. Le sue grandezze non possono quindi essere tutte multiple di una medesima grandezza. Essendo illimitata e di 1ª specie, essa è anche connessa.

83. Dico che:

" Nella nostra classe razionale, non solo l'unità data U, ma qualunque
" grandezza ammette la summultipla secondo un simbolo qualunque ".

Infatti, sia dapprima G una grandezza summultipla dell' unità, cioè $G = \frac{U}{p}$, dove p è un simbolo di moltiplicità, e si cerchi se ne esiste la summultipla secondo r, cioè la grandezza che sarebbe da indicarsi con $\frac{G}{r}$, essendo r un simbolo di moltiplicità arbitrario. Prendasi una grandezza A di una classe qualunque e la sua multipla secondo p, e sia $A_1 = pA$: di A_1 si prenda la multipla secondo r, e sia $A_2 = rA_1$. Sarà A_2 una multipla di A, cioè $A_2 = mA$. Dell'unità U si prenda la summultipla secondo m, e sia $G_1 = \frac{U}{m}$, grandezza che esiste sempre, trovandosi nella classe razionale *tutte* le summultiple dell'unità; allora, se prendiamo la multipla di G_1 secondo r, cioè $G_1' = rG_1$, e di G'_1 la multipla secondo p, cioè $G_1'' = pG_1'$, il risultato è l'unità

U, quindi la G_1' è la summultipla $\frac{U}{p}$ dell'unità, cioè è G; ma G_1' è multipla di G_1 secondo r, quindi G_1 è la summultipla cercata.

Se invece la grandezza è multipla di un parte aliquota dell'unità (o, in particolare, dell' unità stessa) e se ne vuole la summultipla $\frac{G}{p}$, è chiaro che basta prendere la summultipla secondo p della parte aliquota (la quale summultipla ora si è visto esistere), e poi la grandezza che è multipla di essa come G lo è della parte aliquota.

Finalmente, essendo G una grandezza qualunque della classe, e quindi risultante di grandezze discrete (multiple dell' unità) e di multiple di parti aliquote, se si vuole la sua summultipla secondo p, prendiamo la parte aliquota secondo p di ciascuna delle grandezze (multiple dell'unità e multiple di sue parti aliquote) che compariscono nella risultante, e facciamo la risultante delle parti aliquote ottenute; questa risultante è evidentemente la parte aliquota $\frac{G}{p}$ della grandezza G data.

È così completamente dimostrato che tutte le grandezze della classe razionale ammettono le summultiple, secondo simboli di moltiplicità qualunque.

84. " Se di una grandezza A qualunque della classe razionale prendiamo " la parte aliquota secondo p, che sia A_1, e la parte aliquota secondo r, che " sia A_2, dico che la parte aliquota secondo r di A_1 e quella secondo p di " A_2 sono uguali „.

Infatti sia A_1' la prima, cioè $\frac{A_1}{r}$, e A_2' la seconda, cioè $\frac{A_2}{p}$. Allora, siccome le grandezze

$$M = pA_1 \text{ (con } A_1 = rA_1') \quad , \quad N = rA_2 \text{ (con } A_2 = pA_2')$$

sono chiaramente equimoltipici di A_1' e A_2' e sono uguali fra loro, perchè ambedue sono uguali ad A, dovranno essere uguali le loro equisummultiple A_1' e A_2'.

Discende da questo teorema che, date due differenti parti aliquote dell' unità, esse si possono (ciascuna in modo differente) dividere in parti aliquote, in modo che ciascuna delle parti dell' una sia uguale a ciascuna di quelle dell'altra; o, in altre parole, si possono considerare come ambedue multiple della medesima parte aliquota dell' unità. Evidentemente, altret-

tanto può dirsi di due multiple qualunque di parti aliquote dell'unità. Avendo varie di queste multiple di parti aliquote diverse dell'unità ed applicando il teorema alle prime due, poi a queste (già così ridotte ad essere multiple di una medesima parte aliquota dell'unità) ed alla terza e così via, si vede che possono tutte ridursi ad esser multiple della stessa parte aliquota dell'unità.

Una grandezza qualunque della classe razionale essendo risultante di grandezze discrete e di multiple di parti aliquote dell'unità, e le grandezze discrete della classe essendo uguali a multiple di parti aliquote dell'unità, ne viene che una grandezza qualunque della nostra classe può dapprima ritenersi uguale ad una risultante di multiple di parti aliquote (differenti) dell'unità: queste potendosi, per le osservazioni precedenti, dividere in modo che risultino tutte multiple di una *medesima* parte aliquota, ne viene finalmente che ogni grandezza di quella classe è uguale a una multipla di una conveniente parte aliquota dell'unità (non sempre, in generale, la stessa per le varie grandezze) e quindi può ritenersi generata da questa parte aliquota, come una grandezza di classe discreta dall'unità.

Date quindi due grandezze qualunque della classe razionale, si possono ridurre sempre ad essere due multiple della medesima parte aliquota dell'unità (1).

85. Date due grandezze A e B della classe razionale, si possono, come ora si è detto, ridurre ad esser multiple di una medesima parte aliquota U' dell'unità U; talchè sarà $A = m\,U'$, $B = n\,U'$, indicando con mU' ed nU' due multiple in generale differenti di U'. Sarà quindi $A \gtreqless B$, secondochè $m\,U' \gtreqless nU'$; e siccome mU' ed nU' appartengono alla sottoclasse discreta di Γ la quale ha per unità U', varranno per giudicare quale di questi tre casi ha luogo, le cose dette al § 81; onde potremo concludere che per giudicare se due grandezze A e B della classe razionale sono uguali, o, essendo disuguali, qual'è la maggiore, ridurremo le due grandezze ad esser multiple della medesima grandezza U'; e se esse ne sono equimoltiplici,

(1) Questa è quell'operazione che, per la classe dei numeri razionali, si dice in Aritmetica *riduzione al medesimo denominatore.*

saranno uguali; se non lo sono, sarà la maggiore quella le cui unità U' possono corrispondere una ad una a quelle dell' altra, avanzandone alcune. E siccome in infiniti modi A e B si possono ridurre multiple di uguali grandezze (giacchè se ambedue sono multiple di U' sono multiple anche di qualunque summultipla di U' stessa), se uno di questi casi avviene quando sono multiple di una grandezza U', siccome allora è vera necessariamente una delle tre relazioni A $\gtreqless$ B ed una sola di esse, avverrà il medesimo caso anche quando sono ridotte multiple di un' altra grandezza U'', qualunque essa sia.

86. Data una grandezza *qualunque* A della classe razionale, essa sarà uguale, per quello che si è detto, ad una multipla di una parte aliquota dell'unità U, presa per es. secondo il simbolo p, la quale sia V. Prendiamo una summultipla qualunque $\frac{U}{r}$ dell'unità; dico che essa dev'esser multipla di una qualche summultipla di A.

Infatti, posto $U' = \frac{U}{r}$, prendiamo di U' la summultipla secondo p, che sia U''; avremo $U' = p\ U''$. Per quanto si è detto al § 84, la U'' è uguale alla summultipla secondo r della summultipla secondo p di U, cioè di V. Ma essendo A uguale ad una multipla di V, questa summultipla U'' è summultipla anche di A; onde U', che è uguale a pU'', è la multipla secondo p di una summultipla di A, come si doveva dimostrare.

È chiaro dunque che la multipla di una summultipla di U è ancora multipla di una summultipla di A: e quindi, essendo ogni grandezza della classe razionale multipla di qualche summultipla della U, possiamo concludere che qualunque grandezza della classe è multipla di qualche summultipla della grandezza A, scelta pure comunque nella classe.

Questo dimostra che, data una classe razionale costruita rispetto ad una certa unità, se prendiamo un'altra grandezza qualunque A della classe razionale stessa e, rispetto ad essa, costruiamo la classe razionale, questa coincide colla classe originaria. Talchè ogni classe, che sia razionale rispetto ad una grandezza, è tale rispetto a tutte le grandezze della classe stessa, e quindi in essa una grandezza qualunque (all'infuori delle grandezze O ed Ω) può prendersi per unità.

Se in una classe razionale si sceglie un' unità A, tutte le sue multiple si dicono grandezze *intere* rispetto all'unità A, le altre si dicono *frazionarie*. E se in una classe continua Γ, scelta una grandezza A, si forma rispetto ad essa la classe razionale, le grandezze di questa sottoclasse sono le grandezze di Γ *razionali* rispetto ad A.

87. " In una classe continua, prese due grandezze qualunque disuguali " M ed N ($M < N$), fra esse è sempre compresa qualche grandezza di qua- " lunque sua classe razionale. „

Infatti se ciascuna grandezza della classe razionale Γ' fosse o $\leqq M$ o $\geqq N$, in Γ', classe illimitata, in cui quindi non può esistere una successione, esisterebbe un salto, il che non può essere, essendo Γ' connessa.

88. " Le classi razionali sono connesse (§ 82) ma non sono continue. „

In esse infatti esistono delle sezioni. — Per dimostrarlo, si prenda una grandezza qualunque A della classe razionale Γ', e si consideri l' unità U, scelta comunque nella classe. Se p è un simbolo qualunque di moltiplicità, si ponga:

$$U_1 = \frac{U}{p}\ ,\ U_2 = \frac{U_1}{p}\ ,\ U_3 = \frac{U_2}{p}, \ldots\ U_r = \frac{U_{r-1}}{p}, \ldots$$

Ricordiamo che la classe Γ' è di 1ª specie, e quindi le multiple successive di una sua grandezza giungono a superare un'altra sua grandezza qualunque, e notiamo come di qui si deduca che, se questa seconda grandezza non è multipla della prima, vi sono sempre due sue multiple consecutive (la 0 inclusa) che comprendono questa. Con $m\,U$ indichiamo una conveniente multipla di U e con $(m+1)\,U$ quindi, secondo le nostre convenzioni (§ 9), la multipla successiva $S\,(m\,U, U)$; del pari indichiamo con $m_1\,U_1$ una conveniente multipla di U_1, con $m_2\,U_2$ una conveniente multipla di U_2 ecc. Avremo allora evidentemente:

$$m\,U \leqq A < (m+1)\,U.$$

Se non è $m\,U = A$, sarà $D\,(A, m\,U) = A_1$, con $A_1 < U$, onde avremo

$$m_1\,U_1 \leqq A_1 < (m_1+1)\,U_1,$$

dove chiaramente $m_1 < p$ (cfr. al § 10 le definizioni di simboli di moltiplicità maggiori o minori l'uno dell'altro), altrimenti sarebbe $m_1\,U_1 \geqq U$. E se non è $m_1\,U_1 = A_1$, sarà $D\,(A_1, m\,U_1) = A_2 < U_1$, e quindi

$$m_2\,U_2 \leqq A_2 < (m_2+1)\,A_2\,,$$

con $m_2 < p$, ecc. Così proseguendo, o si giunge ad un punto in cui si trova $m_t U_t = A_t$, ed allora evidentemente

$$A = S(m U, m_1 U_1, m_2 U_2, \dots m_t U_t),$$

oppure non si giunge mai a quel punto, ed il procedimento si potrà spingere tanto in là quanto si vuole. Hanno origine allora due serie infinite

(1) $m U,\ S(m U, m_1 U_1),\ S(m U, m_1 U_1, m_2 U_2), \dots$ ecc.

(2) $(m+1) U,\ S\Big(m U, (m_1+1) U_1\Big),\ S\Big(m U, m_1 U_1, (m_2+1) U_2\Big), \dots$ ecc.,

delle quali, la prima è composta di grandezze tutte $< A$, la seconda di grandezze tutte $> A$. Le due serie sono convergenti, perchè le divergenze fra le grandezze dell'una e dell'altra, possono rendersi piccole a piacere nella serie. Per provar ciò, osservando che le divergenze fra i primi, i secondi, i terzi ecc., termini delle due serie sono rispettivamente

$$U, U_1, U_2, U_3, \dots\dots$$

basta mostrare che queste grandezze U, U_1, U_2, ecc., spingendosi in là sufficientemente, sono da un certo punto in poi minori di qualunque grandezza E di Γ'. Sia infatti possibile che restino tutte maggiori di E; allora, siccome (essendo Γ' di 1ª specie) con un simbolo di moltiplicità conveniente n avremmo $n E > U$, e siccome per ipotesi le U_s sono $> E$, e quindi in particolare $U_n > E$, dove U_n indica quella delle U_s che si ottiene contando tante di queste quante E sono in $n E$, sarebbe $n U_n > n E$, e quindi $n U_n > U$, il che non è, per il modo con cui ogni U è ottenuta dalla precedente. Le due serie in questione sono dunque convergenti: il loro limite è quindi A.

Esaminiamo la legge secondo cui si succedono le multiple delle U_s nella serie (1). Essendo A una grandezza di Γ', sarà uguale ad una multipla di qualche summultipla $\frac{U}{t}$ di U_1, cioè

$$A = c\left(\frac{U}{t}\right),$$

con c simbolo di moltiplicità.

Per applicare il processo indicato, si devono trovare due multiple consecutive di U che comprendano A, cioè si deve trovare la massima multipla di U, che è minore di A. Se questa è $m U$, si ha

$$m U < A < (m+1) U;$$

e la divergenza $D(m\,U,\ A) = A_1$ è anch'essa una multipla di $\frac{U}{t}$, cioè

$$A_1 = c_1 \left(\frac{U}{t}\right),$$

dove il simbolo di moltiplicità c_1 è minore di t.

Indi dovremo cercare la massima multipla di $U_1 = \frac{U}{p}$ che è minore di A_1, e trovare quindi m_1 tale che sia

$$m_1 U_1 < A_1 < (m_1+1)\,U_1.$$

Ma osservo che della summultipla $\frac{U}{t}$ si può prendere la summultipla secondo p, della quale quindi A_1 sarà pure multipla, cioè $A_1 = c'_1 \left[\frac{1}{p}\left(\frac{U}{t}\right)\right]$; siccome (§ 84) si ha $\frac{1}{p}\left[\frac{U}{t}\right] = \frac{1}{t}\left[\frac{U}{p}\right]$, potremo scrivere

$$A_1 = c_1' \left[\frac{1}{t}\left(\frac{U}{p}\right)\right] = c_1' \left(\frac{U_1}{t}\right).$$

E siccome si tratta di cercare la massima multipla di U_1 minore di A_1, il problema è del genere del precedente: ed avremo che, se $m_1 U_1$ è questa massima multipla, il resto $A_2 = D(m_1 U_1, A_1)$ è una multipla $c_2 \left(\frac{U_1}{t}\right)$, dove il simbolo $c_2 < t$.

Dopo bisogna cercare qual'è la massima multipla di $U_2 = \frac{U_1}{p}$ contenuta in A_2. E ripetendo il ragionamento precedente, ed osservando che se si prende la summultipla secondo p di $\frac{U_1}{t}$, la A_2 ne è una multipla, cioè $A_2 = c'_2 \left[\frac{1}{p}\left(\frac{U_1}{t}\right)\right]$, essendo $\frac{1}{p}\left(\frac{U_1}{t}\right) = \frac{1}{t}\left(\frac{U_1}{p}\right) = \frac{U_2}{t}$, sarà

$$A_2 = c'_2 \left(\frac{U_2}{t}\right),$$

e quindi la ricerca della massima multipla di U_2 contenuta in A_2 è del genere della precedente e conduce ad un resto A_3 multiplo di $\frac{U_2}{t}$ col simbolo di moltiplicità minore di t. Ora, noto che nel passaggio da A_1 ad A_2, da A_2 ad A_3 ecc., la ricerca della massima multipla rispettivamente di U_1, U_2, U_3 ecc. viene a dipendere dal solo simbolo di moltiplicità, essendo in generale A_q eguale a $c_q \left(\frac{U_{q-1}}{t}\right)$ e dovendosi cercare la massima multipla di U_{q-1} minore di

essa. Se quindi troveremo un simbolo di moltiplicità c_r uguale ad uno dei precedenti c_{r-s}, ne viene che il seguente c_{r+1} risulterà eguale al seguente di c_{r-s}, cioè a c_{r-s+1} ecc., talchè i diversi cofficienti di moltiplicità delle U, U_1, U_2, ecc., ossia m, m_1, m_2 ecc., che sono quelli cercati, da un certo punto in poi si ripeteranno sempre periodicamente. Questo è appunto ciò che avviene; giacchè, dovendo i simboli di moltiplicità c_q essere tutti minori di t, saranno uguali ad uno dei simboli compresi fra 1 e $(t-1)$, e quindi arriverà un punto (almeno quando siano esauriti questi differenti simboli), in cui bisogna ricadere in uno di quelli già usati: di lì in poi s' incominciano a trovare simboli già trovati, e da quel punto la serie delle m si fa periodica.

Possiamo quindi concludere che, se si vuole esprimere la grandezza A qualunque della classe razionale Γ' per mezzo dell'unità U della classe e di speciali sue summultiple U_1, U_2, U_3,....., o la grandezza A è la risultante di multiple di un numero finito di queste summultiple, o A apparisce come limite delle due serie convergenti (1) e (2), dove, per altro, a partire da un certo punto, le m costituiscono un gruppo di simboli che si ripete periodicamente.

Le serie della forma delle (1) e (2) sarebbero composte di grandezze tutte di Γ', anche se i simboli di moltiplicità non godessero la periodicità accennata, ed anche in questo caso sarebbero ancora convergenti. Tuttavia non avrebbero nessun limite in Γ'; giacchè, se questo limite esistesse, esso dovrebbe essere grandezza razionale, perchè di Γ': e poichè le coppie di serie costruite col metodo accennato sono, come si vede facilmente, uniche per ogni grandezza razionale, secondo quanto si è ora dimostrato le serie dovrebbero avere i simboli m che si ripetono periodicamente, contro l'ipotesi.

Quella coppia di serie non ha quindi limite; allora, per quanto si disse al § 47, la classe Γ' si può decomporre in due gruppi che conducono ad una sezione: quindi Γ' non è chiusa, e perciò non è continua, c. d. d.

89. Il teorema precedente mostra che nella classe Γ' si possono costruire infinite coppie di serie convergenti che in essa non hanno limite, ma che lo hanno in Γ, cui appartengono, giacchè Γ è supposta continua. A queste grandezze limiti corrispondono altrettante sezioni in Γ'. Nella classe con-

tinua Γ esistono quindi infinite grandezze che non sono in Γ', cioè che non sono razionali rispetto all'unità di Γ'; e, perchè in Γ' può essere presa come unità ciascuna sua grandezza (§ 86), esistono in Γ infinite grandezze che non sono razionali rispetto a nessuna grandezza di certe sottoclassi di Γ.

Tutte le sezioni, e quindi tutte le coppie di serie convergenti, di Γ', hanno in Γ il loro limite. — Viceversa si può dimostrare che:

" Ogni grandezza di Γ è limite [1] di un collegamento, o di una se- " zione di Γ', e quindi di una coppia di serie convergenti di Γ' stessa „ (Cfr. § 45).

Infatti, se A è una grandezza di Γ, decomponiamo le grandezze di Γ' in due gruppi, ponendo nel primo tutte le grandezze che sono $\leq$ A, nel secondo le altre, che saranno $>$ A. Questa divisione in gruppi non dà origine ad una successione, essendo Γ' illimitata, nè ad un salto, essendo Γ' connessa; quindi, o appartiene ad un collegamento, o ad una sezione. Avviene evidentemente il primo caso, se A è di Γ' ed appartiene quindi al primo gruppo: ed il secondo caso, se A non è di Γ' e non appartiene perciò a nessuno dei due gruppi. In un caso o nell'altro potremo sempre costruire coppie di serie convergenti che abbiano A per limite in Γ, od anche in Γ' se A è razionale.

Se vogliamo quindi studiare i limiti dell'infinite coppie di serie convergenti di Γ, o delle sezioni delle sottoclassi tutte che si possono costruire in Γ, basta studiare i limiti delle coppie di serie convergenti o delle sezioni che si possono costruire in una ad arbitrio delle classi razionali Γ'; giacchè, se A è il limite della data coppia di serie o della data sezione, essa, come si è mostrato, è limite di coppie di serie convergenti, o di sezioni e collegamenti, di una qualunque delle classi razionali Γ'.

Le grandezze di Γ che non compariscono in Γ' si dicono *irrazionali* rispetto a tutte le grandezze di Γ'. La proprietà di una grandezza di essere intera, frazionaria od irrazionale, è quindi relativa alla grandezza scelta per unità nella classe razionale, talchè grandezze che sono irrazionali rispetto ad un'unità, possono essere razionali rispetto ad altre unità (per es. rispetto alle multiple od alle summultiple di sè stesse).

---

[1] Per brevità di linguaggio diciamo qui *limite* di un collegamento la grandezza massima dell'uno o minima dell'altro gruppo del collegamento.

90. Qualunque classe (propria) Γ di prima specie si può ritenere come sottoclasse di una classe continua; giacchè, se pure questa ultima non è data a priori, possiamo con nuovi enti ideali costruirla nel modo seguente. Sia A una grandezza della classe Γ, e costruiamo la sua classe razionale Γ_1 introducendo nuovi enti per quelle summultiple di A che in Γ non esistono, e dando loro i caratteri di uguaglianza, di disuguaglianza, di risultante ecc. che si avrebbero per essi in una classe continua cui appartenesse Γ. Essendo Γ di prima specie, fra le grandezze della nuova classe razionale vi saranno grandezze maggiori e grandezze minori di qualunque grandezza assegnata in Γ. Tutte le grandezze di Γ sono da considerarsi limiti di convenienti serie convergenti di Γ_1, come è facile vedere per quanto si è detto nei §§ precedenti; se quindi a Γ_1 aggiungiamo nuove grandezze da dirsi limiti delle diverse coppie di serie convergenti possibili in Γ, definendole maggiori di tutte quelle della prima serie e minori di tutte quelle della seconda, e scegliendo a questo scopo le grandezze stesse di Γ, quando esse appariscono limiti di coppie di serie convergenti in Γ_1, veniamo ad ottenere da Γ_1 con quest'aggiunta una classe continua, di cui quella data Γ è sottoclasse.

Quindi, tenendo presente che una classe di prima specie è sempre sottoclasse di una classe continua, e le sue grandezze o sono multiple di una grandezza A di questa classe continua, o sono grandezze frazionarie od irrazionali rispetto ad essa, ed in ogni modo sono collegate ad A da una legge ben definita, si vede che lo studio delle classi di prima specie in generale può ridursi a quello delle classi continue considerate in relazione con una loro grandezza A, che si prenda per unità.

91. Data una classe continua Γ e costruita una sua sottoclasse razionale Γ', una grandezza A di Γ determina sempre, come si è visto, una scomposizione di Γ' in due gruppi, dei quali il secondo contiene tutte le grandezze razionali $> A$, ed il primo quelle $< A$, ed A stesso, se A è grandezza razionale.

Se $B = A$, evidentemente, per le note condizioni caratteristiche (§ 20), sarà B maggiore di tutte le grandezze del 1° gruppo (eccetto al più A, se vi è contenuto), e minore di tutte quelle del 2° gruppo. Viceversa, se B è maggiore di tutte le grandezze di Γ' che sono minori di A e minori di quelle maggiori di A, sarà $B = A$. Infatti, allora B viene ad essere (in Γ' od in Γ) li-

mite del collegamento o della sezione data dai gruppi delle grandezze rispettivamente minori e maggiori di A. Ma anche A ne è limite (in Γ' od in Γ): quindi, essendo Γ' e Γ connesse, sarà (§ 46 ecc.) $A = B$. Un teorema simile si ha se, in luogo di considerare A come limite di due gruppi, si considera come limite di due coppie di serie convergenti.

Se invece $B > A$ e $D(B, A) = C$, siccome in Γ' vi sono grandezze minori di C, così nel 2° gruppo, quello delle grandezze di Γ' maggiori di A, devono esistere grandezze minori di $S(A, C)$, altrimenti fra A ed $S(A, C)$ non vi sarebbero grandezze di Γ', e Γ' non sarebbe allora illimitata. Se A_1 è una di queste grandezze, sarà $A_1 < S(A, C)$, cioè $A_1 < B$: quindi B è maggiore di una grandezza (e perciò d'infinite) del secondo gruppo, cioè del gruppo di quelle maggiori di A. Viceversa, se avviene che B sia maggiore di qualcuna delle grandezze di Γ' che sono maggiori di A, è maggiore anche di A.

Ugualmente si tratta il caso di $B < A$, supponendo, se occorre, A facente parte del secondo gruppo, invece che del primo.

Teoremi analoghi si hanno se A è individuato da coppie di serie convergenti.

Riassumendo, possiamo concludere: Se Γ è una classe continua, Γ' una sua sottoclasse razionale, ed A una grandezza razionale od irrazionale di Γ definita come limite di due serie convergenti, oppure di una sezione, o di un collegamento di Γ', la condizione necessaria e sufficiente affinchè un'altra grandezza B di Γ sia uguale ad A, è che sia maggiore di tutte le grandezze del 1° gruppo o della 1ª serie convergente, e minore di quelle del 2° gruppo o della 2ª serie convergente che individuano A, eccetto A stesso in ambedue i casi: e la condizione necessaria e sufficiente affinchè sia $B > A$, o $B < A$, è che rispettivamente B sia maggiore di una, e quindi d' infinite, delle grandezze del 2° gruppo o della 2ª serie convergente che individuano A, o minore d' infinite grandezze del 1° gruppo o della 1ª serie convergente.

E ancora, siano A e B due grandezze qualunque di Γ (razionali od irrazionali), definite, per fissare le idee, ciascuna da due gruppi, $\mathbf{A}_1$ ed $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_1$ e $\mathbf{B}_2$, dai quali si escludono le grandezze A e B se vi appartengono; poichè $A_1 < A < A_2$, $B_1 < B < B_2$, con A_1, A_2, B_1, B_2, grandezze qualunque rispettivamente di $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$, sarà

$$S(A_1, B_1) < S(A, B) < S(A_2, B_2).$$

Viceversa, se C è una grandezza di Γ che è $> S(A_1, B_1)$ e $< S(A_2, B_2)$, dove A_1, A_2, B_1, B_2 sono le grandezze ora accennate dei gruppi che individuano A e B, sarà C limite dei gruppi costruiti rispettivamente dalle grandezze $S(A_1, B_1)$, $S(A_2, B_2)$, come lo è $S(A, B)$: quindi $C = S(A, B)$. E parimente, se, per es., $A > B$, si vede essere

$$D(A_1, B_2) < D(A, B) < D(A_2, B_1),$$

dove $D(A_1, B_2)$ è eseguita fra le grandezze di $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{B}_2$ tali che sia $A_1 > B_2$; mentre viceversa se $A > B$, e $D(A_1, B_2) < C < D(A_2, B_1)$, sarà $C = D(A, B)$.

Si può quindi concludere: La condizione necessaria e sufficiente affinchè una grandezza C di una classe continua Γ sia la risultante $S(A, B)$ di due grandezze di Γ definite dalle coppie di serie convergenti o dalle coppie di gruppi rispettivamente $\mathbf{A}_1$ ed $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_1$ e $\mathbf{B}_2$ della classe razionale Γ' di Γ, è che C sia maggiore delle risultanti di ciascuna grandezza razionale $< A$ e di ciascuna $< B$, e minore delle risultanti di ciascuna grandezza razionale $> A$ con ciascuna $> B$. E affinchè C sia la divergenza $D(A, B)$, è condizione necessaria e sufficiente che C sia maggiore della divergenza fra ciascuna grandezza $< A$ e ciascuna $> B$ (quando questa divergenza esista) e minore della divergenza fra ciascuna grandezza $> A$ e ciascuna $< B$. (1)

Corrispondenza metrica nelle classi di 1ª specie. — 92. Date più classi di 1ª specie ad un senso, o tutte discrete, o tutte razionali, o tutte continue, si può stabilire fra le loro grandezze una corrispondenza univoca nel modo accennato al § 80, tale cioè che sodisfi alle condizioni seguenti:

1° " A ciascuna grandezza A di una classe ne corrisponda una determinata ed una sola in ciascuna delle altre classi. „

2° " Se A e B sono due grandezze di una classe ed A' e B' le corrispondenti di un'altra classe, sia $B \gtreqless B'$ secondochè $A \gtreqless A'$. „

3° " Ad $S(A, B)$ della prima classe, corrisponda $S(A', B')$ della seconda. „

4° " Se $A \gtrless B$, e quindi $A' \gtrless B'$ (2°), sia anche insieme $A' \gtrless B'$ rispettivamente. „

Diremo questa una *corrispondenza metrica*.

Le classi discrete si pongono in queste condizioni, facendo corrispondere, rispettivamente fra loro, tutte le grandezze moduli, tutte le grandezze in-

(1) Cfr. Frattini E. *Sui numeri irrazionali.*

finite, tutte le grandezze unità, e tutte le grandezze equimultiple di queste unità.

Le classi razionali sono tali rispetto a qualunque loro grandezza: sceglieremo per unità una grandezza ad arbitrio per ogni classe, e faremo corrispondere fra loro tutte le grandezze unità, e tutte le grandezze equimultiple ed equisummultiple della unità e delle sue parti in ogni classe. Restando arbitrarie le unità, si vede che la corrispondenza metrica può in esse stabilirsi in infiniti modi.

Nelle classi continue sceglieremo una classe razionale per ciascuna, e metteremo in corrispondenza metrica le grandezze di questa, come ora si è detto. Le grandezze rimanenti, che sono irrazionali di fronte alle rispettive unità, le metteremo in corrispondenza, in modo che se A è una grandezza irrazionale di una classe ed è limite di una certa coppia di serie di grandezze razionali, corrispondano ad A nelle altre classi le grandezze limiti delle coppie di serie formate dalle grandezze razionali corrispondenti a quelle che compongono le serie che individuano A. Anche la corrispondenza fra le grandezze di classi continue, può stabilirsi in infiniti modi.

Le corrispondenze ora indicate soddisfano evidentemente alle condizioni che per esse avevamo poste (V. § 92) (1).

Quanto alle sottoclassi della classe continua, che non sono nè razionali, nè discrete, non le porremo direttamente in corrispondenza; solo metteremo in corrispondenza le classi continue di cui fanno parte, per cui alcune delle grandezze di una data classe potranno avere le corrispondenti nell' altra, alcune altre no. Ma per le grandezze che hanno le corrispondenti, saranno soddisfatte le condizioni poste.

93. La corrispondenza metrica fra due classi di 1ª specie non si può del resto stabilire che nel modo accennato. Infatti, se A ed A′ sono due grandezze corrispondenti delle classi rispettive Γ e Γ′, dovrà in generale (§ 92) ad S (A, A, ... A), multipla di A, corrispondere S (A′, A′, ... A′), equimultipla di A′; ad una summultipla A_1 di A dovrà corrispondere la equisummultipla

(1) Se, trascurando le altre condizioni, conserviamo quella della corrispondenza univoca, si possono far corrispondere anche le grandezze di una classe discreta a quelle di una classe razionale, e quelle di una classe continua a quelle che restano da essa, togliendovi quelle di una classe razionale (le quali per altro non formano una classe). Cfr. CANTOR. Memorie in *Acta Mathematica* Bd 2, e in *Borchardt Journal* Bd. 77 e 83.

A'_1 di A', giacchè se ad A_1 corrispondesse $A_1'' \gtrless A'_1$, le equimultiple di A_1 e di A_1'' dovrebbero essere corrispondenti, e quindi ad A corrisponderebbe non A', ma una grandezza rispettivamente $\gtrless A'$. Le due classi razionali rispetto ad A ed A' si corrispondono quindi nel modo stabilito. Se ora M è una grandezza irrazionale rispetto ad A, è maggiore di tutte le grandezze di uno dei due gruppi in cui si può dividere la classe razionale di A, e minore di tutte le altre. Dividendo la classe razionale di A' nei due gruppi corrispondenti, la grandezza corrispondente ad M dev'essere maggiore di tutte le grandezze del primo di questi due gruppi, e minore di tutte le altre. In questo modo appunto si è detto di stabilire la corrispondenza. Dunque, il modo indicato al § precedente è sempre possibile ed unico per mettere in corrispondenza le classi. L'arbitrarietà sta nella scelta delle prime grandezze A ed A' da fissarsi come corrispondenti, le quali sono arbitrarie del tutto (purchè diverse da 0 e da Ω), tranne se le classi sono limitate, perchè in queste classi si ha di più la condizione che le due grandezze limitatrici (unità), come grandezze minori di tutte le altre, debbano essere corrispondenti.

Quanto si è detto mostra anche che in qualunque corrispondenza metrica, prese due serie convergenti in una classe, e le serie, pure convergenti, delle grandezze corrispondenti nell'altra, al limite delle prime corrisponde il limite delle seconde, essendo il primo maggiore di tutte le grandezze della 1ª serie e minore di quelle della 2ª, e dovendo corrispondergli nell'altra classe una grandezza maggiore delle corrispondenti della prima serie e minore delle corrispondenti della seconda.

94. Per le classi a due sensi possiamo ripetere analoghi ragionamenti; diremo le classi *discrete* o *razionali,* quando sia tale una delle loro sottoclassi principali, ossia, per es., la sottoclasse superiore, nel qual caso tale sarà anche l'altra.

Due classi a due sensi le diremo in corrispondenza metrica, quando la corrispondenza soddisfi alle condizioni generali poste nel § 80, che sono le prime tre del § 92, e quando di più sia soddisfatta l'altra condizione, che sostituisce la 4ª del § 92:

4° " Se $A \lesseqgtr B$, e quindi $A' \lesseqgtr B'$, secondochè $A \lessgtr B$, sia sempre, cioè per

" tutte le grandezze di quelle due classi, $A' \lesseqgtr B'$, o sempre $A' \gtreqless B'$ rispetti-
" vamente. „

Nel primo caso, si vede che si corrispondono metricamente le due sottoclassi di senso superiore e così quelle di senso inferiore, colle condizioni poste al § 92 per le classi ad un senso; nel secondo caso, la sottoclasse superiore di una classe corrisponde a quella inferiore dell'altra, dimodochè sono in corrispondenza metrica, nel senso del § 92, gli stati assoluti delle grandezze delle due sottoclassi: ad una grandezza di un senso in una classe, corrisponde quella dell'altro senso nell'altra, il cui stato assoluto corrisponderebbe a quello della prima grandezza.

Capitolo III.

I numeri reali.

I numeri reali positivi. — 95. Valendoci di quanto si è esposto nel capitolo precedente, introduciamo il concetto di numero nelle classi ad una dimensione di 1ª specie, nel modo indicato al Cap. 1ª della Parte 2ª.

Incominciamo dalle classi ad un senso. In esse, date due grandezze disuguali A e B, è sempre $A > B$ o $A < B$; se consideriamo i numeri a e b corrispondenti ad A e B, diremo, rispettivamente, che il numero a è *maggiore* del numero b, o ne è *minore*: e scriveremo $a > b$, o $a < b$.

Supponiamo di avere più classi discrete poste in corrispondenza metrica. Ad esse possiamo far corrispondere una classe unica di numeri (§ 80), che sono i *numeri interi*. Questa classe di numeri sarà una classe di 1ª specie, e quindi discreta; e sarà così composta dallo zero, dal numero corrispondente alla grandezza unità, che si indica con 1 (*uno*), dai numeri multipli di 1, cioè $1+1$, $1+1+1$ ecc., per i quali possiamo destinare segni e vocaboli speciali, e dal numero infinito ω, che è maggiore di qualunque numero intero. Per la proprietà associativa di cui gode la somma di più numeri (§ 79), si vede che ogni numero è eguale al precedente, aumentato di 1; e quindi, se si pone $1+1=2$, sarà $1+1+1=2+1$; se si pone $2+1=3$, sarà $1+1+1+1=3+1$, ecc.

Ad ogni grandezza di classe discreta corrisponde così un numero intero,

e viceversa; e, in particolare, all'unità della classe corrisponde il numero 1, alla grandezza modulo il numero 0, alla grandezza infinita il numero ω.

96. Volendo poi usare un segno ed una voce differenti per indicare ciascun numero intero, ne viene che, per l'impossibilità di tenere presenti infiniti segni ed infinite voci se non si ha qualche legge per dedurli gli uni dagli altri, è necessario ricorrere a *sistemi di numerazione*, i quali permettano, con poche voci e pochi segni combinati secondo leggi determinate, di scrivere e leggere qualunque numero. Questi sistemi di numerazione si sogliono fondare sulla proprietà associativa di cui gode l'addizione numerica, giacchè essendo, per es., a causa di tal proprietà:

$$\overbrace{1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1}^{a} =$$

$$= \overbrace{(1+1+1+1+1+1+1+1+1+1)}^{b} + \overbrace{(1+1)}^{c},$$

sarà il numero a la somma dei numeri b e c; e poichè b si chiama *dieci*, e c *due*, potremo chiamare a *diecidue* (dodici). Siccome poi a si scrive 10, e c si scrive 2, potremo indicare a con $10+2$; ma nel sistema decimale il numero 10 si indica con 1 scritto al secondo posto, ne viene quindi infine che a potrà indicarsi con 12.

Il concetto dei sistemi di numerazione si vede quindi che riposa su quello di associatività dell'addizione dei numeri.

Senza trattenerci sul modo di esprimere con sistemi di numerazione tutti i numeri interi, il che è ufficio dell'aritmetica pratica, noi seguiteremo ad indicarli con lettere, servendoci per altro dell'ordinario sistema di numerazione decimale, quando vorremo usare numeri speciali determinati.

Se poi M è l'unità di una classe discreta ed a è un numero intero, indicheremo con M_a la grandezza alla quale nella classe corrisponde il numero a. Così, in particolare, $M_0 = 0$, $M_\omega = \Omega$, $M_1 = M$, $M_2 = S(M, M)$ ecc.

È chiaro che potremo ora anche abbandonare l'uso dei simboli di moltiplicità, sostituendoli con numeri; onde, se ad $S(M, M, \ldots M) = C$ corrisponde rispetto ad M il numero a, avremo $C = M_a$, e potremo anche scrivere $M = \frac{C}{a}$, senza che con questi simboli s'intenda per ora niente di più di quello che si intendeva coi simboli di moltiplicità.

97. Passiamo ora al caso di più classi razionali, in ciascuna delle quali

sia fissata un'unità, e che in ordine a questa siano poste in corrispondenza. Ad esse possiamo far corrispondere una classe unica di numeri, che si diranno *numeri razionali.* La classe dei numeri interi potrà considerarsi come sottoclasse della classe di quelli razionali, come le classi discrete sono sottoclassi di quelle razionali. Ed infatti, se M è una grandezza della classe razionale Γ ed a è il numero che le si attribuisce nella classe stessa, le grandezze

$$0,\ M,\ S(M, M)\ldots\ldots,\ S(M, M,\ldots M),\ldots \Omega$$

formano una sottoclasse discreta della classe razionale Γ; i numeri corrispondenti sono

$$0,\ a,\ (a+a),\ldots\ldots,\ (a+a+\ldots+a),\ldots\ldots\ldots\ \omega,$$

e formano essi pure una classe, la quale, se a rappresentasse il numero 1, sarebbe quella dei numeri interi. Se quindi alla grandezza M della classe razionale, che si prende per unità della classe, si fa corrispondere il numero 1, nella classe dei numeri razionali si trova come sottoclasse quella dei numeri interi.

98. I teoremi dimostrati per le classi razionali mostrano (sia perchè i numeri si sono presi corrispondenti in un modo speciale colle grandezze della classe, sia perchè i numeri razionali costituiscono essi stessi una classe) che di qualunque numero razionale esiste il summultiplo secondo qualunque numero intero, che è di nuovo un numero razionale (§ 83). E così un numero razionale qualunque si può sempre ridurre ad essere un multiplo di un qualche summultiplo di 1, e due numeri razionali qualunque si possono sempre ridurre ad essere multipli del medesimo summultiplo di 1 (§ 84). Quest'ultimo teorema si enuncia in aritmetica, dicendo che due numeri razionali qualunque si possono ridurre ad un medesimo denominatore. E se ne deduce che (§ 85) per giudicare se due numeri sono uguali, o, se non lo sono, per riconoscere qual'è il maggiore, si ridurranno al medesimo denominatore, e si vedrà qual'è il multiplo maggiore della corrispondente parte aliquota. Se invece del numero 1 si prende un altro numero razionale, e rispetto ad esso si forma la classe razionale, si trovano (§ 86) di nuovo tutti e soltanto i numeri razionali.

I numeri razionali che non sono interi, si dicono *numeri frazionari* o *frazioni.* Anche i numeri interi si possono per altro considerare come frazioni.

Per rappresentare le frazioni si adoprano due dei segni (numeri) usati per rappresentare i numeri interi; l'uno, il *denominatore,* indica qual summultiplo si prende del numero 1, l'altro, il *numeratore,* dinota qual multiplo debba prendersi di questo. Si scrive il numeratore sopra al denominatore, separando l'uno dall'altro mediante una linea.

99. La classe dei numeri razionali è illimitata, cioè esiste un numero razionale minore di qualunque altro numero razionale preso a piacere. Essa è anche connessa, ma non è continua. In essa esistono delle sezioni, che si trovano come in generale (§§ 88, 89). Se si pone

$$\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p^2},\ \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p^2}\right)=\frac{1}{p^3},\ldots\ \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p^r}\right)=\frac{1}{p^{r+1}},\ldots.$$

e si cerca di esprimere un numero a mediante multipli di 1, di $\frac{1}{p}$, di $\frac{1}{p^2}$, ecc., si trova che o si ha:

$$a=m\,1+m_1\frac{1}{p}+m_2\frac{1}{p^2}+\ldots..+m_t\frac{1}{p^t},$$

oppure che si formano due serie convergenti

$$m\,1,\quad m\,1+m_1\frac{1}{p},\quad m\,1+m_1\frac{1}{p}+m_2\frac{1}{p^2},\ldots\ldots$$

$$(m+1)\,1,\quad m\,1+(m_1+1)\frac{1}{p},\quad m\,1+m_1\frac{1}{p}+(m_2+1)\frac{1}{p^2},\ldots..$$

che hanno per limite a, ed in cui i numeri m, m_1, m_2, ..., almeno da un certo punto in poi, vanno ripetendosi periodicamente. Se quindi formiamo due serie convergenti, come son sempre le precedenti, ma scegliendo invece per le m numeri minori di p che non si ripetono periodicamente, le due serie convergenti non tenderanno ad un limite numero razionale, e la corrispondente divisione in gruppi della classe dei numeri razionali condurrà ad una sezione. Coi numeri razionali si possono quindi costruire infinite coppie di serie convergenti prive di limite razionale.

100. Passiamo ora alle classi continue, e supponiamo di avere scelto in ciascuna di esse l'unità e di aver posto le classi in corrispondenza metrica. Sappiamo che in tal caso tutte le grandezze razionali si corrispondono solo fra loro, e così le grandezze irrazionali (§§ 92, 93). A queste classi pos-

siamo far corrispondere una classe unica di numeri, che sarà una classe continua. Di questa classe è sottoclasse quella già ottenuta dei numeri razionali. Ed infatti, se 1 è il numero che si attribuisce alla grandezza unità U di una classe continua, e si forma la sottoclasse razionale rispetto ad U, essa è sottoclasse della classe continua: quindi la classe corrispondente dei numeri razionali è sottoclasse della classe continua dei numeri. Studiando la classe continua dei numeri, veniamo quindi a studiare tutti i numeri fin qui introdotti.

Per il modo con cui si fa corrispondere una classe C di numeri ad una classe Γ di grandezze, si ha che ad una sezione di C corrisponde una sezione in Γ, e viceversa: e ad una coppia di serie convergenti con limite in C, una coppia di serie convergenti col rispettivo limite in Γ.

Ne viene che a tutte le grandezze irrazionali, cioè non razionali, corrispondono dei numeri che non sono razionali, e che diremo *numeri irrazionali.* La classe continua dei numeri è quindi composta dei numeri razionali e degli irrazionali.

Qualunque classe di 1ª specie è sottoclasse di una classe continua (§ 90): quindi qualunque classe di 1ª specie trova fra i numeri della classe continua quelli che convengono alle sue grandezze.

Per indicare i numeri irrazionali non si ha un sistema di numerazione speciale. Talora si sogliono indicare scrivendo le serie convergenti dei numeri che servono a definirli come limiti (Heine, Cantor, ecc.). Alcuni numeri irrazionali hanno un segno speciale (per es. e, π, $\sqrt[n]{a}$).

101. Tutte le sezioni della classe dei numeri razionali, e quindi tutte le coppie di serie convergenti costruite con numeri razionali, hanno il loro limite razionale o irrazionale. Viceversa, qualunque numero della classe continua dei numeri è limite di un collegamento o di una sezione della classe dei numeri razionali, e quindi è sempre limite di una coppia di serie convergenti formate coi numeri razionali (§ 89). Studiando quindi tutte le possibili coppie di serie convergenti formate con numeri razionali, si vengono ad ottenere in quei loro limiti che non sono razionali, tutti i possibili numeri irrazionali.

La classe di tutti i numeri fin qui introdotti è di 1ª specie, perchè è

continua; dati quindi due numeri qualunque a e b, vi sono sempre infiniti multipli del primo che sono maggiori del secondo.

Le classi Γ di grandezze che si sono ora studiate si sono considerate isolate, e quindi deve considerarsi come tale anche la serie continua dei numeri; onde si può dire che non vi è nessun numero minore di tutti i numeri della classe continua che ora studiamo, all'infuori di 0, nè nessun numero maggiore, all'infuori di ω. Se la classe continua dei numeri non si considera come isolata, come sarà il caso in seguito, questa proprietà non vale più.

La classe continua, quella razionale e quella discreta dei numeri sono proprie; ed in esse l'operazione inversa dell'addizione si dice *sottrazione*, e si indica col segno — (meno). Se per l'addizione e la sottrazione ripetiamo i ragionamenti fatti in generale per le operazioni S e D (§§ 12, 25), si ritrovano tutti i noti teoremi sull'addizione e sottrazione dei numeri e dei polinomi.

102. Ad ogni classe continua di grandezze si può, come si è visto, far corrispondere la classe continua dei numeri, facendo corrispondere il numero 1 all'unità della classe. E siccome in una classe continua qualunque grandezza (all'infuori di 0 e di Ω) può esser presa per unità, ne viene che ad ogni classe continua può farsi corrispondere quella dei numeri, facendo corrispondere 1 ad una grandezza arbitraria della classe (che non sia 0 od Ω). Lo stabilire questa corrispondenza si dice *misurare* le grandezze della classe rispetto all' unità scelta: ed il numero che viene così a corrispondere ad ogni grandezza, si dice la *misura* della grandezza rispetto all' unità scelta. E siccome ad ogni grandezza corrisponde un numero e viceversa, così, rispetto a qualunque unità, ogni grandezza ha un numero che la misura, e viceversa ogni numero è misura di una grandezza.

A grandezze A, B corrispondono misure a, b (prese colla medesima unità), tali che $a \gtreqless b$ secondochè $A \gtreqless B$, e che $a + b$ è la misura di S (A, B), $a - b$ quella di D (A, B).

La classe continua dei numeri è una classe continua di grandezze: onde può farsi corrispondere a sè stessa, grandezza a grandezza, metricamente.

I numeri reali col segno. — 103. Passando alle classi di grandezze

a due sensi, e ponendole in corrispondenza metrica, ad esse possiamo far corrispondere una classe unica di numeri. Supposta la clàsse continua (giacchè, come si vede subito, i casi delle classi discrete o razionali danno numeri che rientrano in quelli delle classi continue) e notando che ogni classe a due sensi si decompone in due sottoclassi principali, si vede che la corrispondenza metrica fra le classi equivale ad una corrispondenza metrica fra due coppie di sottoclassi ciascuna ad un senso e continua, tali che le sottoclassi, di una coppia sono composte delle grandezze opposte a quelle delle sottoclassi dell'altra coppia; o almeno equivale alla corrispondenza mêtrica degli stati assoluti delle grandezze di queste sottoclassi, nel caso che si facciano corrispondere sottoclassi di senso opposto (cfr. § 94).

Stabilendo la corrispondenza in modo che, scelte le unità per una delle coppie di sottoclassi, le unità dell'altra coppia siano le rispettive grandezze opposte, si ha che la classe di numeri che risulta è composta di due sottoclassi continue ad un senso, ciascun numero di una delle quali è opposto di quello fra i numeri dell'altra che, nella sua sottoclasse, è indicato col medesimo numero. Essa si dirà la classe dei *numeri reali.* Distinguendo con un apice i numeri di una delle due sottoclassi, ne viene che la classe di numeri ottenuti è a due sensi, ed ogni numero u ha il suo opposto u', tale che

$$u + u' = 0.$$

Di qui si ha $u' = 0 - u$, o, se si vuole, più brevemente, $u' = - u$, che è la forma più usata. Sarà quindi conveniente indicare i numeri di una delle due sottoclassi principali coi simboli ordinari, e gli altri coi medesimi simboli preceduti dal segno —. I primi si diranno numeri *positivi*, i secondi numeri *negativi*. Per conservare ai numeri positivi le proprietà dei numeri delle classi ad un senso, la loro sottoclasse si prende per sottoclasse superiore nella classe a due sensi dei numeri reali; gli altri numeri sono quelli della sottoclasse inferiore. Se A e B sono due grandezze disuguali di una classe a due sensi cui corrispondono i numeri a e b, e se per es. $A > B$, si dice *a maggiore* di b ($a > b$) o *a minore* di b ($a < b$) secondochè alla sottoclasse superiore dei numeri (numeri positivi) corrisponde la sottoclasse superiore o la sottoclasse inferiore nella classe di grandezze date.

104. Chiameremo *unità* della classe di grandezze quella che si è fatta corrispondere al numero positivo 1: e, se vogliamo, grandezze *positive* o

negative quelle rispettivamente di senso superiore od inferiore. Allora si vede che, se si è scelta per unità in una classe di grandezze a due sensi una grandezza positiva, la sua sottoclasse positiva (o la negativa) si è fatta corrispondere metricamente ai numeri positivi (od ai negativi) e quindi, rispetto ad una grandezza positiva, la misura di una grandezza positiva è un numero positivo, quella di una grandezza negativa è un numero negativo. Parimente si vede che, rispetto ad un'unità negativa, le grandezze positive hanno per misura numeri negativi, quelle negative numeri positivi.

La grandezza negativa opposta ad A si può ora indicare anche con — A, indicando, se si voglia, la grandezza positiva con + A. Ai segni + o — può anche attribuirsi il significato seguente più ampio: il simbolo + indichi di non cambiare il segno della grandezza che segue, e il simbolo — indichi di cambiarlo, cioè di prendere l'opposto. Sarà allora, se A è una grandezza qualunque (in particolare un numero):

$$+(+A) = +A \quad ; \quad +(-A) = -A;$$
$$-(+A) = -A \quad ; \quad -(-A) = +A.$$

Poichè l'insieme dei numeri reali è una classe a due sensi, varranno per essi le proprietà generali dimostrate per le grandezze di classi a due sensi. Sarà quindi, se col segno — indichiamo ora numeri negativi, e senza nessun segno quelli positivi,

$a + (-a) = 0$; $a > 0$; $-a < 0$; $a > -b$; $-a < -b$, se $a > b$.
E così

$$a + (-b) = a - b, \quad = 0 \quad , \quad = -(b-a),$$

dove $a-b$ e $b-a$ sono numeri positivi, secondochè rispettivamente

$$a > b,\ a = b,\ a < b.$$

E si avrà

$$a - b = a + (-b),$$

anche se b indica un numero qualunque positivo o negativo, e $-b$ il suo opposto.

105. La classe continua di tutti i numeri reali è una classe continua di grandezze a due sensi: onde può farsi corrispondere metricamente a sè stessa.

Se ad 1 si fa corrispondere 1, ogni numero ha per misura sè stesso: se si fa corrispondere — 1, ha per misura il proprio opposto.

Se ad 1, nella classe dei numeri considerata come prima classe, si fa corrispondere un altro numero diverso a (che non sia 0 nè ω), nella classe stessa considerata come seconda classe, qualunque numero b della seconda ha per misura un numero c della prima, diverso da b, che si dice *rapporto* fra b ed a.

Se noi definiamo la moltiplicazione fra numeri nel modo consueto della Aritmetica (tenendo conto delle differenti definizioni che si danno per i numeri interi, pei frazionari e per gli irrazionali), presi nella classe continua dei numeri positivi due numeri qualunque, il loro prodotto è daccapo un numero della classe. Onde, conservando le ordinarie definizioni di uguaglianza e disuguaglianza fra i numeri, la categoria dei numeri positivi è classe anche rispetto all' operazione moltiplicazione. Il numero 1 è allora il numero modulo, essendo $1 . a = a$. La classe sarà a due sensi, giacchè per ogni numero a esiste il numero $\frac{1}{a}$, tale che $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ (modulo), onde $\frac{1}{a}$ è il numero opposto ad a. I numeri 0 ed ω sono le grandezze $-\Omega$ ed Ω della nuova classe. L'operazione D, inversa dell'attuale operazione S, sarà la divisione. I numeri > 1 saranno le grandezze positive della classe, quelli < 1 le grandezze negative; ogni grandezza A sarà uguale alla divergenza fra il modulo e la sua opposta $\left(\text{e infatti } a = 1 : \frac{1}{a}\right)$; si eseguirà l' operazione D fra due grandezze A e B, eseguendo l'operazione S fra A e l'opposta di B $\left(\text{e infatti } \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}\right)$ ecc. La multipla di una grandezza sarà quella che nei numeri si dice potenza del numero, giacchè, essendo l' operazione S la moltiplicazione, la multipla di un numero a sarà $a . a . a \ldots\ldots a = a^m$, dove m è il simbolo di moltiplicità. La summultipla è la radice ennesima. Dato un numero a della classe, i numeri da dirsi interi, frazionari od irrazionali rispetto ad esso saranno quindi le potenze di a con esponenti di quelli che nella classe ordinaria dei numeri si dicono rispettivamente interi, frazionari od irrazionali. Questa classe è illimitata e di 1ª specie, giacchè le multiple di qualunque sua grandezza positiva, cioè le potenze intere di qualunque numero > 1, superano qualunque altra grandezza della classe.

Questa classe di grandezze a due sensi si può mettere in corrispondenza

metrica colla classe dei numeri reali, ponendo in corrispondenza il modulo 1 della 1ª classe data col numero 0 della 2ª, e un numero qualunque a della prima, scelto per es. nella sua sottoclasse positiva (cioè, per quanto si è detto, >1), col numero 1 della seconda. Al prodotto, al quoziente di due numeri della prima classe, corrisponde rispettivamente la somma e la differenza dei numeri corrispondenti della seconda classe. Ai numeri maggiori di a della prima, corrispondono quelli maggiori di 1 della seconda: ad a, 1: ai numeri minori di a, quelli minori di 1: ad 1, lo 0; ai numeri minori di 1, quelli negativi. È chiaro che i numeri della seconda classe sono quelli che si sogliono dire i *logaritmi* dei numeri corrispondenti della prima, presi in base a. Si vede quindi che il concetto di logaritmo è un caso particolare del concetto piú generale di misura, e può semplicemente stabilirsi partendo da questo, quando ci si proponga di misurare rispetto ad un numero a la classe dei numeri positivi, considerata come classe rispetto all'operazione moltiplicazione (1).

Capitolo IV.

Le operazioni fra grandezze di classi ad una dimensione.

106. In questo Capitolo supporremo di limitarci a grandezze di classi continue: i casi delle altre classi si riducono a quelli che studieremo.

Date due classi Γ e Γ' di grandezze, si scelga nella seconda una grandezza unità U; diremo allora *prodotto* di una grandezza A (*moltiplicando*) di Γ per una grandezza M (*moltiplicatore*) di Γ', una grandezza omogenea ad A, tale che, rispetto ad A presa come unità, abbia lo stesso numero che M rispetto alla sua unità U: per la qual cosa il prodotto, tranne il caso in cui A od M siano la grandezza modulo, è quella grandezza di Γ che corrisponde ad M, quando, poste le classi in corrispondenza metrica, A corrisponde ad U. Ambedue le definizioni conducono a quella ordinaria: " Il prodotto di A per M è una grandezza formata con A, come M lo è coll'u-

(1) Per essere rigorosi, dovevamo fare il caso dei logaritmi solo dopo aver parlato della moltiplicazione; ma abbiamo preferito supporre nota la definizione di moltiplicazione, per dar subito questo esempio, che si riferisce direttamente al concetto di misura. Per simili ragioni abbiamo spesso citato gli ordini di infinitesimo delle funzioni, prima di parlare del numero, sebbene per conoscere che cos'è una funzione fosse stato necessario il concetto di numero.

" nità„: giacchè il numero di M rispetto alla sua unità U, indica appunto anche qual legge debba applicarsi ad U per ottenere la grandezza M.

L'operazione si dice *moltiplicazione*, ed il prodotto s'indica con M A. È evidente che in generale quest'operazione non è commutativa, essendo M A della classe Γ, A M della classe Γ'. Finchè A od M non sono grandezze moduli, le definizioni precedenti coincidono sempre; e allora si vede anche che, quando Γ e Γ' sono classi continue, il prodotto esiste sempre, ed è unico.

Nel caso in cui sia A = 0, viene a mancare il prodotto ottenuto dalla prima definizione e dalla seconda: dalla terza risulterebbe che il prodotto è la grandezza modulo stessa; se invece M = 0', è in difetto la terza definizione, ma le prime due conducono alla grandezza modulo 0 come prodotto. In ogni caso, quando od A o M siano le rispettive grandezze moduli, o lo siano ambedue, tralasceremo le precedenti definizioni, convenendo di prendere per prodotto la grandezza modulo della classe del moltiplicando. Sarà adunque, con una nuova definizione:

$$M\,0 = 0\,; \quad 0'A = 0\,; \quad 0'0 = 0.$$

Se nè A nè M sono la grandezza modulo, una qualunque delle tre definizioni mostra che non lo sarà neppure la grandezza prodotto; quindi, se indichiamo col nome comune di *fattori* il moltiplicando ed il moltiplicatore, possiamo dire:

" Condizione necessaria e sufficiente affinchè un prodotto sia la gran-
" dezza modulo, è che sia la grandezza modulo qualcuno dei fattori. „

Una od ambedue le classi Γ, Γ' possono essere la classe dei numeri; ed allora abbiamo il caso della moltiplicazione di una grandezza M per un numero, o di due numeri fra loro.

Se Γ e Γ' rappresentano la medesima classe, le A ed M saranno omogenee, ed omogeneo ad esse sarà il prodotto.

Tenendo conto che una corrispondenza metrica è fissata quando si sono fatte corrispondere le grandezze moduli e due grandezze delle classi, ne viene che, per individuare una corrispondenza metrica, basta che sia fissata questa coppia di grandezze, e per indicarla basterà quindi scrivere queste due grandezze. Indicheremo che ad A, B, C,... di una classe corrispondono A', B', C',... dell'altra, scrivendo

$$\begin{bmatrix} A, & B, & C, \ldots \\ A', & B', & C', \ldots \end{bmatrix}:$$

e quindi, per individuare la corrispondenza, scriveremo

$$\begin{bmatrix} O, & A \\ O', & A' \end{bmatrix}, \text{ o semplicemente } \begin{bmatrix} A \\ A' \end{bmatrix}.$$

Avremo allora, per la definizione del prodotto:

$$\begin{bmatrix} A, & MA \\ U', & M \end{bmatrix}, \quad \text{o} \quad \begin{bmatrix} O, & A, & MA \\ O', & U', & M \end{bmatrix},$$

e

$$\begin{bmatrix} U, & A \\ M, & AM \end{bmatrix}, \quad \text{o} \quad \begin{bmatrix} O, & U, & A \\ O', & M, & AM \end{bmatrix}.$$

107. Siano A e B grandezze di una medesima classe Γ, ed M un'altra grandezza di un'altra classe Γ' (che può essere Γ stessa): e supponiamo dapprima che nessuna delle grandezze date sia il modulo della sua classe. I prodotti A M, B M, S (A, B) M sono definiti dalle corrispondenze

$$\begin{bmatrix} U, & A \\ M, & AM \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} U, & B \\ M, & BM \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} U, & S(A, B) \\ M, & S(A, B)M \end{bmatrix},$$

che indicano l'unica corrispondenza

$$(1) \qquad \begin{bmatrix} U, \ldots\ldots & A, \ldots\ldots & B, \ldots\ldots & S(A, B), \ldots\ldots \\ M, \ldots\ldots & AM, \ldots\ldots & BM, \ldots\ldots & S(A, B)M, \ldots\ldots \end{bmatrix}.$$

Ma essendo questa una corrispondenza metrica, alla risultante S (A, B) di due grandezze A, B della classe Γ deve corrispondere nella Γ' la risultante delle grandezze A M, B M corrispondenti ad A, B, cioè S (A M, B M); onde, giacchè la corrispondenza è univoca, dovrà essere

$$(\alpha) \qquad S(A, B)M = S(AM, BM).$$

Eseguiamo invece i prodotti M A ed M B, determinati dalle corrispondenze

$$\begin{bmatrix} A, & MA \\ U', & M \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} B, & MB \\ U', & M \end{bmatrix},$$

le quali mostrando le grandezze... O,... A,... M A,.. rispettivamente corrispondenti alle grandezze... O',.. U',.. M,..., e queste alle altre... O,.. B,.. MB,..., permettono chiaramente di stabilire la corrispondenza, che sarà pure metrica,

$$(2) \qquad \begin{bmatrix} O, & A, & MA \\ O, & B, & MB \end{bmatrix}.$$

Se invece di B avessimo considerato un'altra grandezza C di Γ, ad M A avrebbe corrisposto M C, quando ad A corrispondesse C; quindi, se invece di B si considera la grandezza S(A, B), si avrà la corrispondenza

$$(3) \qquad \begin{bmatrix} O, & A, & MA \\ O, & S(A, B), & MS(A, B) \end{bmatrix}.$$

Ma data una corrispondenza metrica fra due classi identiche, evidentemente si ha una corrispondenza metrica anche sostituendo alle grandezze di una delle classi le risultanti di esse colle corrispondenti dell'altra: onde avremo da (2) la corrispondenza

$$(4) \qquad \begin{bmatrix} O, & A, & M\,A \\ O, & S(A, B), & S(M\,A, M\,B) \end{bmatrix}.$$

Ma (4) e (3) devono essere la medesima corrispondenza, essendo ambedue individuate da $\begin{bmatrix} A \\ S\,(A, B) \end{bmatrix}$: quindi si dovrà avere

$$(\beta) \qquad M\;S\,(A, B) = S\,(M\,A, M\,B).$$

Questa formola (β) insieme alla precedente (α), tenuto conto che, com'è facile vedere, esse valgono anche per il caso non considerato in cui A, B od M siano la grandezza modulo, esprimono che la moltiplicazione gode la *proprietà distributiva* rispetto all'operazione S.

Se Γ è la classe dei numeri ed a, b, m, sono tre qualunque di essi, si hanno dalle precedenti le note formole (giacchè, per i numeri, S è l'addizione)

$$(a + b)\,m = a\,m + b\,m; \quad m\,(a + b) = m\,a + m\,b.$$

108. Vogliamo dimostrare ora che il prodotto di due grandezze omogenee è *commutativo,* vale a dire che si ha, se A e B sono grandezze della stessa classe,

$$A\,B = B\,A.$$

Nel caso in cui B od A siano O, la formula è vera, essendone i due membri uguali ad O.

Esaminiamo gli altri casi.

Se M è una terza grandezza (non O nè Ω) omogenea ad A e B, si è già visto (§ 107 formula (2)) che si ha la corrispondenza

$$(5) \qquad \begin{bmatrix} A, & M\,A \\ B, & M\,B \end{bmatrix}.$$

Dico intanto che si ha anche l'altra

$$(6) \qquad \begin{bmatrix} A, & A\,M \\ B, & B\,M \end{bmatrix},$$

cioè che A M e B M, con M grandezza qualunque, sono corrispondenti nella corrispondenza metrica $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$.

Per dimostrare la (6), ricordiamo che dalla (1) si ha la corrispondenza metrica $\begin{bmatrix} A, \ldots & B, \ldots \\ AM, \ldots & BM, \ldots \end{bmatrix}$, la quale conduce immediatamente alla (6), quando si dimostri in generale che, dalla corrispondenza metrica tra grandezze omogenee

$$\begin{bmatrix} X, \ldots & Y, \ldots \\ X_1, \ldots & Y_1, \ldots \end{bmatrix},$$

si deduce l'altra

$$\begin{bmatrix} X, \ldots & X_1, \ldots \\ Y, \ldots & Y_1, \ldots \end{bmatrix}.$$

Quest'ultimo teorema è vero in generale. Se infatti la classe in questione è ad un senso, ed è dato

$$\begin{bmatrix} X, \ldots, & Y, \ldots \\ X_1, \ldots, & Y_1, \ldots \end{bmatrix},$$

se p e q sono arbitrari numeri interi, sarà anche evidentemente

$$\begin{bmatrix} X, \ldots & pX, \ldots & Y, \ldots & qY, \ldots \\ X_1, \ldots & pX_1, \ldots & Y_1, \ldots & qY_1, \ldots \end{bmatrix},$$

cioè sarà una corrispondenza metrica la

$$\begin{bmatrix} pX, & qY \\ pX_1, & qY_1 \end{bmatrix},$$

e quindi, qualunque siano p e q, avremo (§ 92)

(7) $$pX_1 \gtreqless qY_1, \text{ secondochè } pX \gtreqless qY.$$

Stabilendo ora la corrispondenza $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ e cercando in essa la grandezza Y'_1 corrispondente ad X_1, avremo

$$\begin{bmatrix} X, & X_1 \\ Y, & Y'_1 \end{bmatrix},$$

e quindi sarà evidentemente una corrispondenza metrica anche la

$$\begin{bmatrix} pX, & pX_1 \\ qY, & qY'_1 \end{bmatrix}.$$

Da quest'ultima si deduce immediatamente che

(8) $$pX_1 \gtreqless qY'_1, \text{ secondochè } pX \gtreqless qY.$$

La (8) e la (7) mostrano che sarà insieme

$$pX_1 \gtreqless qY_1 \quad \text{e} \quad pX_1 \gtreqless qY'_1,$$

cioè

$$Y_1 \gtreqless \frac{pX_1}{q} \quad \text{e} \quad Y_1' \gtreqless \frac{pX_1}{q},$$

qualunque siano p e q: quindi, presa la classe razionale rispetto ad X_1, le Y_1 ed Y_1' sono limiti del medesimo collegamento o della medesima sezione, e perciò

$$Y_1 = Y_1':$$

onde la corrispondenza

$$\begin{bmatrix} X, & X_1 \\ Y, & Y_1' \end{bmatrix}$$

equivale all'altra

$$\begin{bmatrix} X, & X_1 \\ Y, & Y_1 \end{bmatrix},$$

che è quella che volevamo dimostrare. — Se poi la classe è a due sensi, pensando che alla corrispondenza metrica delle sue grandezze va unita la corrispondenza metrica dei loro stati assoluti, che sono grandezze ad un senso, se in generale A^0 indica lo stato assoluto di A, dalla corrispondenza

$$\begin{bmatrix} X, \ldots. & Y, \ldots. \\ X_1, \ldots. & Y_1, \ldots. \end{bmatrix}$$

dedurremo l'altra

$$\begin{bmatrix} X^0, \ldots. & Y^0, \ldots. \\ X_1^0, \ldots. & Y_1^0, \ldots. \end{bmatrix},$$

e da questa, per quanto abbiamo dimostrato, si otterrà la corrispondenza

$$\begin{bmatrix} X^0, \ldots. & X_1^0, \ldots. \\ Y^0, \ldots. & Y_1^0, \ldots. \end{bmatrix}.$$

Ma, per il modo con cui al § 94 si disse di stabilire la corrispondenza fra le classi a due sensi, nella corrispondenza

$$\begin{bmatrix} X, & Y \\ X_1, & Y_1 \end{bmatrix}$$

o X ed X_1 sono del medesimo senso, e tali sono Y ed Y_1: o X ed X_1 sono di senso contrario, e saranno pure tali Y ed Y_1; e quindi, in ogni caso, secondochè X ha il medesimo senso o il senso contrario a quello di Y, avrà X_1 il medesimo senso o il senso contrario a quello di Y_1. Si avrà quindi (§ 94) che dalla corrispondenza

$$\begin{bmatrix} X^0, & X_1^0 \\ Y^0, & Y_1^0 \end{bmatrix},$$

già provata, discenderà sempre la

$$\begin{bmatrix} X, & X_1 \\ Y, & Y_1 \end{bmatrix}.$$

Quest'ultima corrispondenza, essendo così dimostrata in generale, prova vera la (6), come doveva farsi.

Le corrispondenze (5) e (6) mostrano che, se in una corrispondenza metrica $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ le A e B sono corrispondenti, sono pure corrispondenti le grandezze che si ottengono moltiplicando esse per una loro omogenea qualunque M, sia a destra che a sinistra.

Allora, nella corrispondenza $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ risulteranno corrispondenti le grandezze A A, B A, ottenute moltiplicando A e B a destra per A, e le altre A A, A B, ottenute moltiplicando A e B a sinistra per A. E poichè A B e B A vengono così a corrispondere nella stessa corrispondenza ad una medesima grandezza, sono uguali, e quindi, in tutti i casi,

$$A\,B = B\,A,$$

cioè il prodotto di due grandezze omogenee è *commutativo*.

In particolare, è commutativo il prodotto di due numeri a e b, cioè

$$a\,b = b\,a.$$

109. Per prodotto di n grandezze consecutive intenderemo il prodotto del prodotto delle prime (n-1) per l'ultima. Ciò posto, dico che il prodotto di tre grandezze è associativo; cioè, che se le tre grandezze sono A, B, C, si ha:

$$(A\,B)\,C = A\,(B\,C).$$

Infatti, per la definizione del prodotto (A B) C si ha (§ 106) la corrispondenza

$$\begin{bmatrix} U, & (A\,B) \\ C, & (A\,B)\,C \end{bmatrix}, \tag{9}$$

e per la definizione del prodotto B C l'altra

$$\begin{bmatrix} U, & B \\ C, & B\,C \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Ma cogli stessi ragionamenti fatti al § 107 per dimostrare la (2), si prova che la (2) vale anche se A e B non sono della medesima classe, e che quindi in una corrispondenza di classi differenti, moltiplicando a sinistra due grandezze corrispondenti per la medesima grandezza anche non omogenea ad

esse, si ha una nuova coppia di grandezze corrispondenti nella medesima corrispondenza. Dalla (10) si avrà quindi:

$$\begin{bmatrix} U, & A\,B \\ C, & A\,(B\,C) \end{bmatrix}.$$

Ora questa è la stessa corrispondenza (9), essendo ambedue individuate da $\begin{bmatrix} U \\ C \end{bmatrix}$; ma alla medesima A B corrispondono due grandezze (A B) C ed A (BC), quindi, come si doveva dimostrare,

$$(A\,B)\,C = A\,(B\,C)\,.$$

Perchè valga questa proprietà, occorre per altro che, nel fare i prodotti BC, ed (A B) C, per la classe dei moltiplicatori (che è la stessa, quella di B) si scelga la medesima unità U.

Da questo teorema e dal precedente discende agevolmente la proprietà:

" Il prodotto di quante si vogliano grandezze omogenee è commutativo " ed associativo. „

In particolare vale questo teorema per i numeri.

110. Se A e B sono due grandezze, non necessariamente omogenee, delle classi Γ e Γ', ed U, U' sono le unità in queste classi, indicando con C la classe dei numeri reali, con a e b le misure di A e B rispetto alle unità U ed U', cioè i numeri che corrispondono ad A e a B nella corrispondenza metrica fra Γ e C, avremo le corrispondenze

$$\begin{bmatrix} U, & A \\ B, & A\,B \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} U, & A \\ 1, & a \end{bmatrix},$$

da cui, per confronto, discende la nuova corrispondenza metrica

$$\begin{bmatrix} 1, & a \\ B, & A\,B \end{bmatrix}.$$

Ma per la definizione di prodotto fra numeri si ha

$$\begin{bmatrix} 1, & a \\ b, & a\,b \end{bmatrix},$$

e questa corrispondenza colla precedente conduce all'altra

$$\begin{bmatrix} B, & AB \\ b, & a\,b \end{bmatrix},$$

la quale è la corrispondenza della misura della classe Γ', essendo individuata da $\begin{bmatrix} B \\ b \end{bmatrix}$. Si deduce che $a\,b$ è in Γ' la misura di A B rispetto all'unità U', onde:

" La misura di un prodotto, fatta colla medesima unità con cui si è

" misurato il moltiplicando, è uguale al prodotto delle misure dei fattori, " quando il moltiplicatore si misura coll'unità stessa, colla quale si costruisce " il prodotto delle grandezze. „

I due prodotti A B e B A, quando Γ e Γ' non sono omogenee, non possono, come si è notato, essere uguali; ma sono peraltro uguali le loro misure *a b* e *b a*, quando si conservino nell'eseguire i due prodotti e nel fare le misure le medesime unità.

Si vede di qui che per eseguire il prodotto A B di due grandezze A e B coll'unità U rispetto ad A, fissata un'unità arbitraria U' per B, si misura A con U, B con U'; dei due numeri *a* e *b* che risultano si fa il prodotto, e si costruisce la grandezza omogenea a B, che rispetto ad U' ha per misura questo prodotto *a b*. La grandezza che si trova è il prodotto cercato.

Se in particolare si debba fare il prodotto *a* B di una grandezza B per un numero *a*, basterà fare il prodotto di *a* per la misura di B rispetto ad un'unità qualunque U', indi costruire la grandezza che rispetto ad U' ha per misura questo prodotto.

Tutte le moltiplicazioni fra grandezze si sapranno quindi eseguire mediante l'aritmetica, poichè questa insegna ad eseguire le moltiplicazioni fra numeri.

111. La moltiplicazione fra grandezze ammette due casi distinti per l'operazione inversa, che si dice *divisione*, nella quale, quando non è detto esplicitamente il contrario, escluderemo per i dati i valori 0 ed Ω.

Questi due casi sono:

1° Date le grandezze C (prodotto) e B (moltiplicando), omogenee necessariamente, trovare la grandezza X (moltiplicatore) in una classe Γ', uguale o diversa a quella Γ, cui appartengono C e B.

2° Date le grandezze C (prodotto) in una classe Γ ed A (moltiplicatore) in una classe Γ' non necessariamente omogenea a Γ, trovare la grandezza Y (moltiplicando).

In ambedue i casi C si dice *dividendo*, e l'altra grandezza data *divisore;* il risultato *quoziente*.

Nel 1° caso dev'essere C = X B; le grandezze X B, X devono essere corrispondenti nella corrispondenza metrica stabilita fra Γ e Γ' in modo che a B di Γ corrisponda l'unità U' di Γ'. Se U' è già fissata, la corrispondenza

risulta già stabilita, ed è $\begin{bmatrix} B \\ U' \end{bmatrix}$: e la grandezza di Γ' corrispondente a C è la X. Se U' non è fissata, potremo fissarla ad arbitrio in infiniti modi, ed otterremo infinite grandezze X. Quindi la divisione fra un dividendo (prodotto) ed un divisore (moltiplicando) ha sempre un quoziente: e ne ha uno solo, quando sia stabilito a che classe Γ' deve appartenere il quoziente, e quale dev'essere l'unità in Γ.

Se abbiamo $C = 0$, e $B = 0$, avremo, come è facile a vedersi (§106), X qualunque; se $C = 0$ e $B \gtrless 0$, sarà $X = 0'$; se $B = 0$ e $C \gtrless 0$, non esisterà grandezza quoziente.

Nel 2° caso è dato $C = A\,Y$, e si cerca Y; le grandezze A Y, A devono essere corrispondenti nella corrispondenza metrica fra Γ e Γ', quando ad U di Γ corrisponde Y di Γ'. La corrispondenza è sempre stabilita, ed è $\begin{bmatrix} A \\ A\,Y = C \end{bmatrix}$; quindi, se anche U è fissata, Y sarà la sua corrispondente in Γ', e sarà la grandezza cercata: se U non è fissata, si avranno infinite soluzioni, corrispondenti agli infiniti modi di prendere U. La classe del quoziente è sempre determinata, essendo quella Γ' cui appartiene A.

Se abbiamo $C = 0$, $A = 0'$, si vede che Y è qualunque; se $C \gtrless 0$, $A = 0'$, la Y non esiste; se $C = 0$, $A \gtrless 0'$, si ha $Y = 0'$.

Se le classi Γ e Γ' sono identiche, i due casi si ridurranno ad un solo, giacchè $B\,X = X\,B$ (§ 108).

Se Γ e Γ', od ambedue, sono la classe dei numeri, si ha il caso della divisione di una grandezza qualunque per la grandezza numero, o di due numeri fra loro.

Se Γ' è la classe dei numeri e siamo nel 1° caso, in cui è dato $C = X\,B$ ed il moltiplicando B, e si cerca il numero X, poichè l'unità nella classe dei numeri è il numero 1, ne viene che il quoziente è un numero determinato; e poichè la corrispondenza sarà allora $\begin{bmatrix} B, & C = XB \\ 1, & x \end{bmatrix}$, si deduce che il quoziente cercato non è che la misura di C prendendo B per unità (§ 102). Se quindi la divisione fra le due grandezze omogenee C e B ed anche il loro quoziente s'indicano col segno $\frac{C}{B}$, questo segno può servire ad indicare la misura di C, presa rispetto a B come unità.

112. " Se, date due grandezze C e B omogenee, se ne cerca il quoziente in

" una data classe Γ′ con un'unità U′, esso è una grandezza che ha per misura
" in Γ′ e rispetto ad U′ il numero che è quoziente della divisione di C per B „.

Infatti, se X è il quoziente in Γ′, deve aversi la corrispondenza metrica $\begin{bmatrix} B, & C \\ U', & X \end{bmatrix}$, e se x è il quoziente numerico della divisione di C per B, deve aversi $\begin{bmatrix} B, & C \\ 1, & x \end{bmatrix}$: onde si può stabilire la corrispondenza metrica $\begin{bmatrix} U', & X \\ 1, & x \end{bmatrix}$, la quale mostra che x è la misura di X rispetto ad U′, c. d. d.

Dico inoltre che:

" Il numero quoziente della divisione di C per B è uguale al quoziente
" dei due numeri, che sono le misure di C e di B, prese rispetto ad una me-
" desima unità, scelta comunque in Γ. „

Se infatti U è un' unità qualunque in Γ, b e c sono le misure rispetto ad essa di B e di C, ed x è la misura di C rispetto a B, cioè il numero quoziente della divisione di C per B, avremo le corrispondenze $\begin{bmatrix} U, & B, & C \\ 1, & b, & c \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} B, & C \\ 1, & x \end{bmatrix}$, donde si rileva $\begin{bmatrix} b, & c \\ 1, & x \end{bmatrix}$, la quale mostra che $c = b\,x$, cioè che x è il quoziente della divisione di c per b, c. d. d.

Si può quindi concludere:

" Per dividere due grandezze omogenee C e B l'una per l'altra, data la
" classe Γ′ del quoziente e l'unità U′, basta prendere la grandezza di Γ′, che
" rispetto ad U′ ha per misura il quoziente delle misure di C e di B, prese
" rispetto ad un' unità qualunque di Γ. „

Le osservazioni fin qui svolte mostrano che la moltiplicazione e la divisione fra grandezze si possono eseguire col sussidio dell'Aritmetica, ricorrendo cioè alle corrispondenti operazioni sui numeri.

Rapporti e proporzioni. — 113. Seguitiamo ad escludere dalle nostre considerazioni le grandezze moduli e le grandezze infinite.

Se, date due grandezze omogenee A e B, ed essendo m un numero intero, troveremo che

$$m\,B \leq A \quad , \quad (m+1)\,B > A\,,$$

diremo che B è *contenuto m volte in* A *con* o *senza resto*, secondochè $mB < A$, o $m\,B = A$.

Date quattro grandezze A, B, M, N, omogenee le prime due fra loro e le altre due pure fra loro, ma non necessariamente omogenee tutte e

quattro, diremo che esse *sono in proporzione*, quando la 2ª e la 4ª sono contenute sempre uno stesso numero di volte in due grandezze equimoltiplici della 1ª e della 3ª [1]: e si scriverà

$$A : B :: M : N, \text{ od anche } A : B = M : N.$$

Si dirà in tal caso anche che il *rapporto di* A *a* B *è uguale al rapporto di* M *ad* N.

Se invece, prese tutte le equimoltiplici di A e di M, avviene che per due di esse p A, p M, (e quindi per tutte le successive) la B sia contenuta in p A più volte che la N in p M, allora diremo che il *rapporto di* A *a* B *è maggiore di quello di* M *ad* N, e questo è *minore* di quello. Potremo, se si voglia, scrivere

$$A : B > M : N, \text{ o } M : N < A : B.$$

Siccome date quattro grandezze A, B, M, N avviene necessariamente uno dei tre casi che si esprimono dicendo che il rapporto di A a B è uguale, maggiore o minore di quello di M ad N, così l'ente *rapporto*, sebbene non definito in sè, è tale da potersi dire grandezza.

114. " Date tre grandezze A, B, N, omogenee le prime due, non ne-" cessariamente omogenea ad esse la terza, esiste sempre nella classe Γ' " di N una grandezza X, tale che A : B :: X : N, tale cioè che il rapporto " di X a N è uguale a quello di A a B. "

Se infatti nella classe Γ' (supposta, come sempre in questo capitolo, continua) non esistesse una tale grandezza X, le grandezze di Γ' si potrebbero dividere in due gruppi, l'uno $\mathbf{P}_1$ le cui grandezze hanno ad N un rapporto minore di quello di A a B, e l'altro $\mathbf{P}_2$ le cui grandezze hanno ad N un rapporto maggiore di quello di A a B. Le prime esistono, perchè, per es., scelto il numero p tale che sia la multipla $p\,A > B$, basta prendere per X una grandezza $Y < \frac{N}{p}$, essendo allora $p\,Y < N$: le seconde pure esistono, perchè, prendendo il numero q tale che sia $A < q\,B$, e poi prendendo $Y > q\,N$, la Y è una grandezza da porsi in $\mathbf{P}_2$. Allora dico che $\mathbf{P}_1$ è senza grandezza massima, e $\mathbf{P}_2$ senza grandezza minima. Infatti da $P_1 : N < A : B$ si ha per definizione, che, per un certo numero m, la N è contenuta in $m\,P_1$ minor numero di volte che B in m A, cioè che, con n conveniente, mentre

$$n\,B < m\,A \quad , \quad (n+1)\,B \leqq m\,A$$

[1] De Paolis. *Elementi di Geometria.*

è invece

$$n\,N \leqq m\,P_1 < (n+1)\,N\,.$$

Ma se si pone $D\left((n+1)\,N,\ m\,P_1\right) = C$ e si considera una grandezza $C' < \frac{C}{m}$, poichè $S\,(m\,P_1\,,\ C) = (n+1)\,N$, sarà

$$S\,(m\,P_1\,,\ m\,C') = m\,S\,(P_1\,,\ C') < (n+1)\,N,$$

e quindi

$$n\,N < m\,S\,(P_1\,,\ C') < (n+1)\,N,$$

onde $S\,(P_1\,,\ C')$ è di $\mathbf{P}_1$. Un'analoga dimostrazione si fa per $\mathbf{P}_2$. Allora la divisione in gruppi dà uno spezzamento, contro l'ipotesi che Γ' sia continua. La X quindi esiste.

115. In base a questo teorema, dati i due rapporti di A e B, e di C e D (ossia date due coppie di grandezze A, B e C, D) possiamo sempre determinare X ed Y in modo che sia

$$A : B :: X : N \quad , \quad C : D :: Y : N,$$

e dire che il rapporto di S (X, Y) ad N è la *somma* dei rapporti di X ad N e di Y ad N, od anche di A a B e di C a D.

Tralasceremo le dimostrazioni che i concetti di uguaglianza, di disuguaglianza e di somma, stabiliti per i rapporti, sodisfano alle proprietà generali fissate come loro condizioni caratteristiche (¹). Da esse potremmo conconcluderne che i rapporti formano una classe di grandezze rispetto all'operazione somma.

116. " Se date le grandezze A, B (di Γ) e M, N (di Γ') esse sono in pro-
" porzione, e si pongono Γ e Γ' in corrispondenza metrica in modo che ad
" A corrisponda M, dico che a B corrisponderà N. „

Infatti, siccome se $m\,A \gtreqless n\,B$ dev'essere evidentemente, per la definizione di proporzione, $m\,M \gtreqless n\,N$, e questo qualunque siano m ed n, ne viene che con $\frac{m\,A}{n} \gtreqless B$, dev'essere rispettivamente $\frac{m\,M}{n} \gtreqless N$; e quindi, siccome le $\frac{m\,A}{n}$ corrispondono ad $\frac{m\,M}{n}$ (§ 93), se non avviene che per qualche

(¹) Cfr. STOLZ. *Vorlesungen.*

coppia di numeri m ed n si abbia $\frac{mA}{n} = B$, da cui $\frac{mM}{n} = N$, nel qual caso si vede subito che B ed N si corrispondono, dividendo le grandezze $\frac{mA}{n}$ razionali rispetto ad A in grandezze minori e maggiori di B, le corrispondenti saranno divise in grandezze minori e maggiori di N: le B ed N vengono quindi ad essere limiti di sezioni corrispondenti nelle classi razionali rispetto ad A e ad M poste in corrispondenza metrica, quindi B ed N sono corrispondenti, c. d. d.

È vero anche il Teorema reciproco:

" Se date le grandezze A, B (di Γ) ed M, N (di Γ') A corrisponde ad " M e B ad N in una corrispondenza metrica di Γ e Γ', le quattro grandezze " sono in proporzione ".

Infatti, se N_1 è la grandezza di Γ tale che

$$A : B :: M :: N_1,$$

nella corrispondenza metrica in cui A corrisponde ad M, per il Teorema precedente a B corrisponderà N_1. Ma, per ipotesi, in tale corrispondenza, B corrisponde ad N, quindi $N = N_1$, e si ha:

$$A : B :: M : N, \qquad \text{c. d. d.}$$

117. Ciò posto, dico che:

" Se $A : B = M : N$, il numero quoziente della divisione di A per B, " cioè (§ 112) il quoziente delle misure a e b di A e di B rispetto ad una " medesima unità U, è uguale al numero quoziente delle grandezze M ed N, " cioè al quoziente delle loro misure m, n rispetto ad un' unità U' ".

Infatti se x rappresenta il numero quoziente $\frac{a}{b}$, cioè $\frac{A}{B}$, y quello $\frac{m}{n}$, cioè $\frac{M}{N}$, si avranno le corrispondenze metriche

$$\begin{bmatrix} B, & A \\ 1, & x \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} N, & M \\ 1 & y \end{bmatrix}.$$

Ma, essendo $A : B :: M : N$, per il teorema del paragrafo precedente si ha la corrispondenza metrica

$$\begin{bmatrix} B, & A \\ N, & M \end{bmatrix},$$

la quale, combinata colla precedente, dà l'altra

$$\begin{bmatrix} 1, & x \\ 1, & y \end{bmatrix}.$$

Ma $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ individua la corrispondenza identità, in cui ogni numero corrisponde a sè stesso: perciò $x = y$, c. d. d.

" La reciproca è pur vera „

giacchè dalle corrispondenze che si hanno allora per ipotesi

$$\begin{bmatrix} B, & A \\ 1, & x \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} N, & M \\ 1, & y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1, & x \\ 1, & y \end{bmatrix},$$

si deduce l'altra

$$\begin{bmatrix} B, & A \\ N, & M \end{bmatrix},$$

che conduce alla proporzione

$$A : B :: M : N.$$

Se ne conclude che se quattro grandezze A, B, M, N stanno in proporzione, stanno pure in proporzione le loro misure prese con una medesima unità per le prime due, e con una medesima unità per le altre due, e viceversa.

118. Siccome se m ed n sono numeri, ed il rapporto di A a B è uguale a quello di m ad n, cioè se

$$A : B :: m : n,$$

si deve avere che il quoziente numerico $\frac{A}{B}$ è uguale a quello $\frac{m}{n}$, cioè $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$, e invece se

$$A : B \gtrless m : n,$$

il quoziente $\frac{A}{B}$ dev'essere $\gtrless \frac{m}{n}$, e inoltre se

$$A : B :: m : n, \quad C : B :: p : n$$

è

$$S(A, C) : B :: m + n : n,$$

e quindi

$$\frac{S(A, C)}{B} = \frac{m + n}{n},$$

ne viene che, se si vuole, per questo ente *rapporto* fra m e n (che non si è definito in sè) si può prendere il quoziente $\frac{m}{n}$, e per rapporto di A a B il quoziente $\frac{A}{B}$, cioè il quoziente fra le misure di A e di B. Ciò equivale

a identificare i due enti rapporto e numero. Le proporzioni fra grandezze si potranno allora definire come uguaglianze del quoziente delle prime due a quello delle altre due.

Il primo modo di considerare i rapporti, come enti cioè non definiti in sè, è indipendente dal concetto di numero, ed è quello seguito da Euclide per le grandezze geometriche. Il secondo modo è più semplice, ricorrendo al sussidio sempre potente dell'Aritmetica; ma ha bisogno di appoggiarsi al concetto di numero (¹).

Caso speciale delle classi a due sensi. — 119. Tutte le considerazioni precedenti, nelle quali non si è fatta nessuna distinzione, convengono ugualmente alle classi ad uno ed a quelle a due sensi. Peraltro, nel caso speciale delle classi a due sensi, si può fare uno studio a parte, per riconoscere il senso delle grandezze che sono risultati di moltiplicazioni e divisioni.

Le unità di ogni classe le prenderemo sempre del senso superiore. Allora, quando si cerca il prodotto B A, se A e B sono di senso superiore il prodotto è di senso superiore; giacchè, dovendo stabilire la corrispondenza metrica in modo che all' unità U' di Γ' corrisponda A di Γ, verranno così a corrispondersi le sottoclassi di ugual senso, ed allora il prodotto B A dovendo corrispondere a B, e B essendo della sottoclasse superiore, il prodotto B A sarà pure di senso superiore. Si dimostra in modo simile che, se delle due grandezze A e B una è di senso superiore e l'altra di senso opposto, il prodotto è di senso inferiore: e che se A e B sono ambedue di senso inferiore, il prodotto è di senso superiore. Indicando quindi con A e B gli stati assoluti delle grandezze da moltiplicarsi, e ponendo in evidenza i sensi di questi, si avrà:

$$(+B)(+A) = +(BA) \quad ; \quad (-B)(-A) = +(BA);$$
$$(-B)(+A) = -(BA) \quad ; \quad (+B)(-A) = -(BA).$$

Se Γ e Γ' sono ambedue la classe dei numeri reali, ed A e B sono quindi numeri, si ha di qui la nota regola dei segni per la moltiplicazione dei numeri positivi e negativi.

(¹) Questo cenno sui rapporti e sulle proporzioni è lungi dall'essere svolto completamente e colle necessarie particolarità. Si è esposto solo per dare un altro esempio di grandezze introdotte senza definirle in sè, e per mostrare come si possano considerare, sia distinte dal numero, sia identiche ad esso.

Per la divisione, si vede subito che, quanto ai segni, vale la medesima regola.

Capitolo V.

I numeri e la misura nelle classi a più dimensioni.

Corrispondenza metrica delle classi complesse. — 120. Vediamo ora come si possano mettere in corrispondenza metrica due classi del medesimo numero di dimensioni, allo scopo di giungere ai concetti di numero e di misura anche in queste classi.

Avendo studiato le classi ad una dimensione di 1.ª specie, ci limiteremo alle classi complesse pure di 1.ª specie (§ 73).

Per soddisfare alle condizioni richieste al § 80, e per poter considerare le classi ad una dimensione come un caso particolare di quelle complesse, in modo da avere la corrispondenza del § 92 anche in una classe ad una dimensione che risulti come caso particolare da una classe complessa (la quale allora viene a confondersi colle sue sottoclassi elementari), stabiliremo la corrispondenza metrica fra due classi di un ugual numero di dimensioni, ponendo in corrispondenza metrica a due a due le loro sottoclassi elementari.

Si vede intanto che, se almeno le sottoclassi elementari sono tutte del medesimo genere, cioè o tutte discrete, o tutte razionali, o tutte continue, in modo che si possa *ogni* sottoclasse elementare dell' una mettere in corrispondenza con *ogni* sottoclasse elementare dell' altra, la corrispondenza metrica si può stabilire in più modi differenti, dipendenti dalle diverse combinazioni delle sottoclassi fra loro.

Per le condizioni generali del § 80, stabilita la corrispondenza fra le grandezze delle sottoclassi elementari, verrà stabilita anche fra le altre grandezze; e una grandezza qualunque avrà per corrispondente la risultante delle grandezze corrispondenti alle sue parti elementari.

Nello stabilire la corrispondenza metrica quando la classe è discreta, si faranno corrispondere le due grandezze moduli fra loro, e le unità di ciascuna sottoclasse elementare di una delle due classi a quelle delle sottoclassi elementari scelte come corrispondenti nella seconda. Se la classe è razionale o continua, sceglieremo in ciascuna sottoclasse e nella sua cor-

rispondente le grandezze da assumere come unità, le quali restano quindi arbitrarie. Fissate le n unità di una classe e le loro corrispondenti, la corrispondenza è individuata.

La corrispondenza è individuata anche se fissiamo due grandezze sole da dirsi corrispondenti, purchè esse non siano di sottoclassi elementari e nessuna delle loro parti componenti sia la grandezza modulo; giacchè, se queste due grandezze appartenenti rispettivamente alle classi Γ' e Γ'' sono

$$M' = S(M_1', M_2', \ldots M_n') \quad , \quad N'' = S(N_1'', N_2'', \ldots N_n''),$$

si è visto che sono corrispondenti, quando si corrispondono le grandezze elementari delle coppie

$$M_1', N_1''; \; M_2', N_2''; \ldots\ldots; \; M_n', N_n'':$$

e allora la corrispondenza delle due grandezze date fissa queste n corrispondenze elementari, e quindi fissa la corrispondenza metrica.

I numeri complessi. — 121. Quanto al concetto di numero nelle classi complesse, lo stabiliremo nel modo generale indicato al § 79, tenendo conto anche di quanto si disse ai §§ 95 e seguenti, affinchè i numeri reali possano risultare un caso particolare dei numeri delle classi complesse.

Secondochè quindi due grandezze di classi complesse sono uguali o disuguali, diremo che hanno numeri *uguali* o *disuguali* ; e se A, B,..L sono grandezze della classe ed M è la loro risultante, diremo che M ha un numero che è la *somma* dei numeri di A, B,..L. Di più, se A e B appartengono ad una medesima sottoclasse elementare, secondochè $A \gtreqless B$, diremo che il numero di A è *maggiore, uguale* o *minore* di quello di B.

I numeri complessi corrispondenti ad una classe complessa di grandezze, formano evidentemente una classe rispetto all'operazione addizione. Siccome ogni grandezza della classe è la risultante di n grandezze di sottoclassi elementari, così, per le definizioni date, ogni numero complesso appartenente a questa classe sarà la somma di n numeri appartenenti rispettivamente alle n sottoclassi elementari. I numeri appartenenti ad una medesima sottoclasse elementare formano evidentemente una classe di numeri ad una dimensione, cioè reali; quindi, in conclusione, la classe dei numeri appartenenti ad una classe complessa ad n dimensioni sarà una classe complessa, avente per sottoclassi elementari le n classi di numeri

reali (da considerarsi come classi distinte), appartenenti alle n sottoclassi elementari della classe data. Questi numeri si diranno *numeri complessi ad n dimensioni*: e ciascuno di essi sarà la somma di n numeri reali, da considerarsi come distinti, perchè appartenenti a classi diverse che non sono poste e non si possono porre in corrispondenza metrica (le n sottoclassi elementari di una medesima classe). Si ha dunque, se a indica un numero ad n dimensioni ed $a_1, a_2, \ldots a_n$, convenienti numeri reali di n classi distinte, che

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n .$$

Questi numeri reali a_r si possono dire le *parti elementari* del numero complesso; e ciascuno di essi appartiene ad una determinata sottoclasse elementare della classe di grandezze a cui corrisponde.

Due numeri complessi essendo uguali quando lo sono le grandezze corrispondenti, e queste quando lo sono le rispettive parti elementari, ne viene che due numeri complessi sono uguali, quando lo sono le rispettive parti elementari. E poichè l'operazione S fra più grandezze complesse si fa eseguendo quella sulle loro rispettive parti elementari, ne viene anche facilmente che la somma di più numeri complessi è un numero complesso, che ha per parti elementari le somme delle rispettive parti elementari degli addendi.

122. Ad ogni classe di grandezze siamo venuti così a far corrispondere una classe speciale di numeri. Ma se le classi complesse si fanno corrispondere fra loro metricamente, ad esse può collegarsi una medesima classe di numeri complessi, finchè almeno le operazioni sulle classi si limitano all' operazione S ed alla sua inversa D. Se per la corrispondenza metrica si pongono altre condizioni, o se si ha riguardo ad altre operazioni, questa classe di numeri, unica per le classi complesse di un medesimo numero di dimensioni, non sarà in generale possibile, ed avremo tante specie di classi di numeri ad n dimensioni, quante saranno le specie differenti di classi di grandezze.

Il far corrispondere metricamente una classe di numeri ad una di altre grandezze, si dice *misurare* le grandezze rispetto alle n unità scelte nelle n sottoclassi elementari, cioè a quelle grandezze che si fanno corrispondere agli n numeri reali 1 della classe dei numeri; ed il numero che corrisponde ad ogni grandezza, si dice *misura* della grandezza.

Distinzione delle classi complesse. — 123. Nelle classi ad *n* dimensioni, abbiamo considerato come indipendenti fra loro le grandezze di differenti sottoclassi elementari, avendo supposto che, prese due grandezze A e B di sottoclassi elementari differenti, non si possa dire se A $\gtrless$ B. Nelle classi (di 1.ª specie) ad una dimensione, date due grandezze qualunque M ed N, si è visto che, presa M come unità, la N è sempre una grandezza, o multipla di M, o razionale rispetto ad M, o irrazionale, nel qual caso è limite di determinate serie convergenti di grandezze razionali. In ogni caso resta sempre determinata una legge (consistente nel prendere multiple, summultiple, risultanti di esse, limiti di serie composte di esse) colla quale da M si passa ad N, la qual legge è fondata sull' ipotesi che la classe sia ad una dimensione, e che quindi di due grandezze M ed N si possa sempre dire se M $\gtreqless$ N.

Nelle classi complesse, se A e B sono grandezze di sottoclassi elementari differenti, non può dirsi se A $\gtrless$ B, ma solo che A $\lesseqgtr$ B; talchè la grandezza B non può più essere individuata applicando ad A una legge del genere di quelle accennate ora. Nonostante, possiamo considerare già come una legge il semplice passaggio da A a B, o almeno ad una determinata grandezza della sottoclasse elementare di B. Quando si tratti di speciali classi di grandezze, può darsi che questo passaggio, che diremo *spostamento*, si possa collegare ad una operazione già definita che conduca da A a B. Per es., nella classe a due dimensioni costituita dai segmenti di un piano (§ 73), prendendo per sottoclassi elementari quelle dei segmenti in due determinate direzioni diverse fra loro, lo spostamento di un segmento preso nella prima di queste direzioni su un suo congruente nell'altra direzione, può collegarsi all'operazione effettiva " rotazione di quel segmento per un angolo uguale a quello delle due direzioni „. Se questa interpretazione non è possibile o non si voglia fare, il passaggio da A a B, o, più particolarmente, dalla grandezza scelta per unità in una sottoclasse elementare all'unità di un'altra sottoclasse elementare, è già in sè un'operazione determinata, ed esprime una legge la quale, applicata alla prima unità, conduce alla seconda. Essa è allora un'operazione puramente formale, ma sempre ben definita.

124. Nelle classi ad una dimensione, la medesima legge che serve a passare da A a B, si può applicare (almeno se la classe è continua) a qualunque altra grandezza della classe, e si ha un risultato che è di nuovo della classe. Nelle classi a più dimensioni, ciò dà luogo a delle distinzioni. Può darsi che uno spostamento di una certa unità in un'altra sia interpretabile con una operazione determinata, la quale, con identica definizione, possa compiersi su tutte le altre unità, come è il caso delle grandezze a due dimensioni già citate, nelle quali la rotazione può applicarsi anche alla seconda unità; come può darsi invece che questa interpretazione non sia applicabile a nessuna, o, al più, solo ad alcune delle altre unità, cioè, applicata a qualche unità, o non abbia significato, o conduca ad enti che non sono nella classe. Più generalmente, per comprendere anche il caso in cui gli spostamenti non hanno interpretazione (o non si vuole che l'abbiano) all'infuori di quella che li ha definiti, del passaggio cioè da un'unità all'altra considerato come puro passaggio della mente non collegato ad altre operazioni, può avvenire che quando uniamo il concetto di questo passaggio a quello di un' altra unità, il che esprimeremo dicendo che *applichiamo* questo spostamento ad un'altra unità, si voglia che a questa unione sia collegata una grandezza della classe, la quale si dirà *risultato* dell' operazione *spostamento* applicata all'altra unità, oppure può avvenire che non si voglia considerare possibile l'unione di quei due concetti, o, unendoli insieme, si voglia considerare collegato ad essi, in modo da dirlo risultato di quell'operazione, un nuovo ente non appartenente alla classe.

Si capisce come, in generale, essendo questo legame puramente arbitrario e ideale, si potrà nella classe esigere che avvenga l'uno o l'altro dei due casi. Nelle classi le cui grandezze sono enti definiti in sè con altre proprietà oltre quelle che li caratterizzano come grandezze, l'avvenire l'uno o l'altro di questi due casi dipende da queste proprietà speciali, se vogliamo tener conto solo di queste per trovare l'interpretazione di uno spostamento; ma niente impedisce che anche in esse l'operazione sia definita in modo puramente ideale o formale, ed avvenga quindi ad arbitrio l'uno o l'altro caso, senza che si riesca a trovare un'interpretazione concreta di quell'operazione.

Se, per es., la classe è a due dimensioni, ed è quella che contiene tutti

i segmenti, tutti gli angoli e tutti i gruppi possibili composti di un segmento e di un angolo, le sottoclassi elementari saranno la classe dei segmenti e quella degli angoli. Fissato un segmento ed un angolo come unità rispettive, si può vedere nel passaggio da quello a questo un'operazione, che è di quelle che si son dette *spostamenti*; questa può interpretarsi, per es., come una rotazione del segmento e successiva trasformazione delle due posizioni iniziale e finale del segmento in due parti indefinite di retta, con che si giunge all'angolo; una simile operazione applicata all'angolo, per il quale si suppongano le sole ordinarie proprietà, non dà nessun altro ente, e quindi lo spostamento è inapplicabile all'angolo; oppure, se si vuole, si può dire applicabile all'angolo, collegando all'insieme di angolo e spostamento un ente della classe, per es. un segmento od un altro angolo; oppure finalmente lo spostamento si può dire applicabile all'angolo, collegando peraltro come risultato a quest'operazione un ente, che non sia nè segmento, nè angolo, nè un gruppo di un angolo e di un segmento, per es. un solido, un numero ecc.

Nelle classi di enti definiti solo in quanto sono grandezze, per es. i numeri, nelle quali non può darsi la rappresentazione, per dir così, concreta dello spostamento, l'arbitrarietà di questi collegamenti si vede manifesta: per i numeri, è chiaro che non dà luogo che ad una condizione analitica.

Abbiamo quindi da distinguere tre specie differenti di classi:

1° Classi in cui non si considerino spostamenti, nelle quali cioè si ritenga impossibile il passaggio da un'unità all'altra (e quindi da una grandezza qualunque ad un'altra qualunque) di sottoclassi elementari differenti.

2° Classi in cui questo passaggio sia possibile con una operazione che si dice *spostamento* da qualche unità a qualche altra, per es. dalla r^{ma} alla s^{ma}, ma che applicato ad un'altra unità, o non dia resultato, o lo dia tale da doversi considerare come un ente non appartenente alla classe.

3° Classi in cui questo spostamento, applicato a tutte le altre unità, dia origine di nuovo ad enti della stessa classe.

Le classi della prima categoria, le diremo *classi ad unità indipendenti*: quelle della 2ª, *classi ad unità di un sistema illimitato*: quelle della 3ª, *classi ad unità di un sistema limitato.*

I tre casi devono essere esaminati particolarmente.

S'intende che in tutti questi casi nulla vi sarà da cambiare al già detto circa l'uguaglianza e disuguaglianza e circa la somma dei numeri, giacchè la corrispondenza metrica fra la classe ed i suoi numeri è indipendente dalle precedenti distinzioni. La diversità fra le tre specie di classi s'incomincierà a notare quando le classi già costituite si porranno in corrispondenza metrica, in modo che ad un'unità dell'una si faccia corrispondere una grandezza qualunque dell'altra, e si vorrà che questo basti per stabilire la corrispondenza, ritenendosi *ogni* grandezza delle prime generata da quell'unità mediante leggi determinate, come si fa per le classi ad una dimensione.

Classi ad n unità indipendenti. — 125. Nelle classi ad n unità indipendenti si vuol ritenere impossibile il passaggio da un'unità ad un'altra (essendo quest'impossibilità un postulato talora conforme a quello che avviene in pratica, talora no); per conseguenza, ad ogni unità di una sottoclasse elementare non si possono applicare che le ordinarie legge dei numeri reali. Ne viene che quando diremo di applicare ad una grandezza complessa di questa classe

$$M = S(M_1, M_2, \ldots M_n)$$

un numero complesso

$$c = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_n$$

corrispondente alla classe stessa, si dovrà intendere di applicare i numeri reali $c_1, c_2, \ldots c_n$ rispettivamente alle grandezze elementari delle corrispondenti sottoclassi $1^a, 2^a, \ldots n^a$, e quindi rispettivamente ad $M_1, M_2, \ldots M_n$. Queste operazioni essendo (§ 106) altrettante moltiplicazioni, potremo dire che il risultato di quest'applicazione è

$$S(c_1 M_1, c_2 M_2, \ldots c_n M_n).$$

Se abbiamo due di queste classi con ugual numero di dimensioni e colle sottoclassi elementari due a due del medesimo genere (discrete, cioè, razionali, o continue), possiamo stabilire una corrispondenza metrica unicamente facendo corrispondere una grandezza qualunque di una sottoclasse elementare di una ad un'altra qualunque della corrispondente sottoclasse elementare dell'altra, e questo per tutte le sottoclassi elementari; ed alle grandezze di una classe, che sono risultanti di grandezze elementari, le risultanti delle grandezze elementari corrispondenti nell'altra. Per indicare

la corrispondenza metrica, occorrerà quindi indicare a quali grandezze si fanno corrispondere nell'altra n grandezze rispettivamente delle n sottoclassi elementari della prima classe data. Una corrispondenza metrica è dunque individuata da un simbolo della forma

$$\begin{bmatrix} (N_1, N_2, \ldots N_n) \\ (M_1, M_2, \ldots M_n) \end{bmatrix}.$$

126. Se Γ e Γ' sono due classi in queste condizioni, ed A e B sono due loro rispettive grandezze, diremo *prodotto* di A per B, e indicheremo con B A, la grandezza della classe Γ di A alla quale, rispetto ad A come unità, corrisponde lo stesso numero che a B, rispetto all' unità scelta: vale a dire la grandezza che si ottiene applicando ad A la legge che si è applicata all'unità U di Γ' per avere B. Si vede che con questa definizione la grandezza B A sarà quella che corrisponde a B, quando alle n unità di Γ' si facciano corrispondere le n parti elementari di A. Se quindi

$$A = S(A_1, A_2, \ldots A_n) \quad , \quad B = S'(B_1, B_2, \ldots B_n),$$

e se sarà

$$\left[\begin{pmatrix} U_1, U_2, \ldots U_n \\ A_1, A_2, \ldots A_n \end{pmatrix}, \begin{matrix} B \\ X \end{matrix} \right]$$

la corrispondenza stabilita, dove $U_1, U_2, \ldots U_n$ sono le n unità di Γ', si avrà che X è il prodotto cercato. È chiaro che, in generale, se $X = S(X_1, X_2, \ldots X_n)$, la sua r^a parte elementare X_r sarà la grandezza della sottoclasse elementare r^a di Γ che corrisponde a B_r, quando A_r corrisponde ad U_r. E siccome le sottoclassi elementari sono ad una dimensione, sarà (§ 106) X_r la grandezza prodotto di A_r per B_r, e quindi $X_r = B_r A_r$. Avremo allora:

$$B A = S(B_1 A_1, B_2 A_2, \ldots B_n A_n).$$

Questa uguaglianza mostra che la moltiplicazione fra grandezze di classi complesse ad n unità indipendenti si riduce ad n moltiplicazioni in classi ad una dimensione sola. Si ha quindi subito che il prodotto in queste classi sarà commutativo, associativo e distributivo; che la divisione fra due grandezze si eseguirà mediante n divisioni fra grandezze di sottoclassi elementari, e precisamente che

$$\frac{A}{B} = S\left(\frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}, \ldots \frac{A_n}{B_n}\right);$$

che la moltiplicazione di una grandezza per un numero complesso ad unità indipendenti si farà moltiplicando le parti elementari delle grandezze per le

rispettive parti elementari del numero, e prendendo la risultante di questi prodotti parziali.

Non è quindi il caso di fare di queste classi uno studio speciale.

Classi ad *n* unità di sistemi illimitati. — 127. Nelle classi ad *n* unità di sistemi illimitati, si può mediante un'operazione (che ha un significato effettivo legato all'essenza delle grandezze, o un significato puramente ideale e rappresentante solo il passaggio dal dato al risultato, ma che in ogni caso si dice *spostamento*) passare da una delle unità ad una delle altre, o più generalmente (potendosi prendere per unità una grandezza qualunque di ciascuna delle sottoclassi elementari) da una grandezza di una delle sottoclassi elementari ad una grandezza di una delle altre, le quali grandezze allora si prenderanno corrispondentemente per unità. Questo spostamento applicato ad una delle altre unità, (nel senso che al § 124 si è spiegato doversi attribuire a queste parole) non conduce in generale ad una grandezza appartenente alla classe complessa in questione; ma, se si vuole, ad un altro ente estraneo a questa classe, che possiamo anche introdurre idealmente per rappresentare il risultato di quell'operazione.

In queste classi si considera come un'operazione il passaggio da un unità ad un'altra qualunque, o più specialmente da una determinata a tutte le altre. Prendiamo questa determinata unità, e diciamola *unità principale*, chiamando *sottoclasse elementare principale* quella a cui essa appartiene; per conoscere un'altra unità qualunque, basterà conoscere l'unità principale e lo spostamento necessario per il passaggio da questa a quella. Ne viene che una grandezza qualunque di una sottoclasse elementare sarà individuata, quando sia noto lo spostamento dell'unità principale a quella scelta nella sottoclasse data, ed il numero (reale) che corrisponde alla grandezza data rispetto a questa unità. E siccome una grandezza di una classe ad *n* dimensioni è la risultante delle sue *n* parti elementari, così una grandezza qualunque è nota quando siano noti: l'unità principale, gli $(n-1)$ spostamenti dell'unità principale nelle rimanenti, e i numeri (reali) di ciascuna parte elementare nella propria sottoclasse elementare.

Le *n* parti elementari di un numero complesso possono quindi considerarsi, o come altrettanti numeri reali corrispondenti (metricamente) alle rispettive parti elementari della grandezza, e quindi esprimenti leggi (reali)

da applicarsi ad unità di grandezze di classi ad una dimensione, oppure come altrettante leggi da applicarsi ad un'unità sola, la principale, che comprendono uno spostamento ed un numero reale.

Due classi di grandezze, ambedue ad n dimensioni e colle classi elementari due a due della medesima specie, si potranno porre in corrispondenza metrica, facendo corrispondere le unità principali, e, nelle altre sottoclassi elementari, quelle grandezze in cui si trasforma l'unità principale applicandole i varii spostamenti.

In particolare, in una data classe saranno conosciuti i numeri (i quali devono costituire una classe in corrispondenza metrica con quella data) quando siano dati gli $(n-1)$ spostamenti del numero 1 (unità principale) negli altri $(n-1)$ numeri, che sono le rimanenti unità: ed allora ogni numero complesso si esprimerà mediante quegli $(n-1)$ spostamenti ed n numeri reali.

128. Esaminiamo a quali risultati conduca la moltiplicazione in queste classi.

Supporremo date due classi Γ e Γ' di grandezze, ambedue a sistema illimitato e col medesimo numero di dimensioni, con sottoclassi elementari due a due della medesima specie (o, per semplicità, tutte continue); le due classi si possono supporre anche identiche. Fisseremo le due sottoclassi elementari principali, e poi le altre sottoclassi elementari dell'una classe che si vogliono ordinatamente far corrispondere a quelle dell'altra, venendo così a collegare ogni spostamento dell'una classe con uno spostamento dell'altra.

Allora, se A è una grandezza di Γ e B una di Γ', diremo *prodotto* B A di A per B una grandezza che si ottenga da A applicando ad essa la medesima legge che occorre applicare all'unità principale di Γ' per avere la grandezza B. Limitiamoci, il che basta al nostro scopo, al caso semplice in cui B sia una grandezza di una sottoclasse elementare Γ' diversa dalla principale, ed A una grandezza pure elementare e non principale di Γ. Siccome per passare dall'unità principale a B occorre uno spostamento ed un numero reale, così la grandezza B A si dovrebbe ottenere applicando ad A lo spostamento corrispondente, e, successivamente, quel numero reale. Ma, per l'ipotesi fatta sulla classe Γ, questo spostamento conduce ad un ente estraneo alla classe, dunque il prodotto manca nella classe. In particolare

avviene questo, quando si vuol moltiplicare una grandezza per un'altra della medesima classe, o una grandezza per un numero della sua classe, o due numeri di tali classi fra loro.

Le classi che ora studiamo non sono quindi classi rispetto all'operazione moltiplicazione: e per render possibili tutti i prodotti, dovremmo aggiungere alla classe nuovi enti. Se a questi nuovi enti volessimo applicare i medesimi concetti, saremmo in generale condotti a nuovi enti e cosi via, talchè saremmo costretti, o a dichiarare impossibili quelle operazioni, o a cercare sempre nuovi enti.

Perciò tali classi sono dette ad unità di sistemi *illimitati.* (1)

Classi ad *n* unità di sistemi limitati. — 129. Nelle classi ad *n* unità di sistemi limitati si suppone ancora, come nelle precedenti, che si dica *spostamento* l'operazione consistente nel passaggio da un'unità (principale) a ciascuna delle rimanenti; ma di più si suppone che questo spostamento possa applicarsi alle altre unità, e non dia nuovi enti, ma conduca a grandezze della classe che si studia. Di qui il nome di sistemi *limitati.*

Quanto si è detto circa i numeri nelle classi a sistema illimitato, vale evidentemente qui ancora, dipendendo dal fatto, che qui pure si verifica, che è possibile passare da una data unità alle altre. Avremo quindi ancora che un numero complesso sarà espresso da *n* numeri reali e da $(n-1)$ spostamenti, e indicherà leggi da applicarsi ad una sola unità, quella principale.

Studiamo piuttosto i risultati a cui conduce la moltiplicazione in queste classi.

Siano date due classi di grandezze Γ e Γ' a sistemi limitati, soddisfacenti alle condizioni poste nel § precedente, in modo da avere gli spostamenti dell'una corrispondenti uno ad uno a quelli dell'altra. Possono essere Γ e Γ' la stessa classe, per es. una classe di numeri, ecc. Siano $M^{(1)}$, $M^{(2)}$,... $M^{(n)}$ le *n* grandezze scelte come unità nelle sottoclassi elementari della classe Γ, e $P^{(1)}$, $P^{(2)}$,.... $P^{(n)}$ le analoghe della classe Γ': se M è una grandezza di Γ e P una di Γ', ed m_1, m_2,... m_n sono le misure delle parti elementari di M rispetto alle unità rispettive $M^{(1)}$, $M^{(2)}$,... $M^{(n)}$, e p_1, p_2,... p_n le analoghe per P, l'r^a parte elementare di M sarà $m_r\, M^{(r)}$, e potrà indicarsi anche con

(1) Cfr. Hankel. Op. cit.

$M^{(r)}_{m_r}$; e l's^a parte elementare di P sarà $p_s\, P^{(s)}$, e potrà indicarsi anche con $P^{(s)}_{p_s}$. Sarà allora:

$$M = S(m_1\, M^{(1)}, m_2\, M^{(2)}, \dots\, m_n\, M^{(n)}) = S\left(M^{(1)}_{m_1}, M^{(2)}_{m_2}, \dots\, M^{(n)}_{m_n}\right),$$

$$P = S(p_1\, P^{(1)}, p_2\, P^{(2)}, \dots\, p_n\, P^{(n)}) = S\left(P^{(1)}_{p_1}, P^{(2)}_{p_2}, \dots\, P^{(n)}_{p_n}\right).$$

Come negli altri casi, intenderemo per prodotto P M di M per P la grandezza modulo di Γ, se P od M è la grandezza modulo: e se nè P nè M sono la grandezza modulo, intenderemo una grandezza di Γ ottenuta applicando ad M la legge corrispondente a quella che si deve applicare all'unità principale di Γ' per avere P.

Se P è un numero reale p, è intanto evidente che

$$p\, M = S(p\, m_1\, M^{(1)}, p\, m_2\, M^{(2)}, \dots\, p\, m_n\, M^{(n)}),$$

dove $p\, m_r\, M^{(r)}$ indica il prodotto di $M^{(r)}$ per il numero reale $(p\, m_r)$.

In generale, la grandezza P è ottenuta applicando a $P^{(1)}$ il numero reale p_1, indi a $P^{(1)}$ lo spostamento (i_2') che la fa divenire $P^{(2)}$ ed al risultato il numero reale p_2, a $P^{(1)}$ lo spostamento (i_3') ed al risultato $P^{(3)}$ il numero reale p_3 ecc., e prendendo poi la risultante dei risultati. E siccome la moltiplicazione di M per $P^{(r)}_{p_r}$ ha allora appunto il significato di applicazione ad M dello spostamento corrispondente ad (i_r) e successiva moltiplicazione per il numero reale p_r, ne viene che sarà, secondo questa regola,

$$(1) \qquad P\, M = S\left(P^{(1)}_{p_1} M, P^{(2)}_{p_2} M, \dots\, P^{(n)}_{p_n} M\right).$$

Cerchiamo quale grandezza rappresenti $P^{(r)}_{p_r} M$. Questo prodotto dev'essere la grandezza che si ottiene da M applicandovi la legge corrispondente a $P^{(r)}_{p_r}$. Ma questa grandezza $P^{(r)}_{p_r}$ si ottiene dall'unità principale $P^{(1)}$ collo spostamento (i'_r) e colla successiva applicazione del numero reale p_r: quindi, per avere $P^{(r)}_{p_r} M$, dovremo applicare ad M lo spostamento (i_r) corrispondente ad (i_r'), ed al risultato il numero reale p_r; cioè si avrà

$$P^{(r)}_{p_r} M = p_r\left((i_r)\; M\right).$$

Per la nostra moltiplicazione *ammetteremo ora* che debba valere, per ora al-

meno in parte, il principio commutativo, *ponendo*

$$p_r\Big((i_r)\ \mathrm{M}\Big) = (i_r)\ (p_r\,\mathrm{M}),$$

e perciò, per quanto si è già visto,

$$p_r\Big((i_r)\mathrm{M}\Big) = (i_r)\ \Big\{p_r\ \mathrm{S}\Big(\mathrm{M}^{(1)}_{m_1}, \ldots\ \mathrm{M}^{(n)}_{m_n}\Big)\Big\} = (i_r)\ \mathrm{S}\Big(p_r\ \mathrm{M}^{(1)}_{m_1}, \ldots\ p_r\ \mathrm{M}^{(n)}_{m_n}\Big),$$

e in parte il principio distributivo, *ponendo*

$$(i_r)\ \mathrm{S}\Big(p_r\,\mathrm{M}^{(1)}_{m_1}, \ldots p_r\,\mathrm{M}^{(n)}_{m_n}\Big) = \mathrm{S}\Big((i_r)\,p_r\,\mathrm{M}^{(1)}_{m_1}, \ldots\ (i_r)\ p_r\,\mathrm{M}^{(n)}_{m_n}\Big).$$

Queste condizioni servono a rendere la moltiplicazione simile a quella delle grandezze reali, e sono verificate per le classi complesse a noi note, in cui lo spostamento ha un significato concreto; per le altre, sono effetto di pure convenzioni. Con esse avremo quindi

$$\mathrm{P}^{(r)}_{p_r}\,\mathrm{M} = \mathrm{S}\Big((i_r)\,p_r\,\mathrm{M}^{(1)}_{m_1}, \ldots.\ (i_r)\ p_r\,\mathrm{M}^{(n)}_{m_n}\Big),$$

od anche, tenendo presente che con $\mathrm{M}^{(s)}_{m_s}$ si vuole indicare la grandezza elementare di Γ che ha il numero m_s rispetto all' unità $\mathrm{M}^{(s)}$ della sottoclasse, e che quindi valgono per essa le regole già date per la moltiplicazione di grandezze e di numeri reali (§ 110), sarà

$$\mathrm{P}^{(r)}_{p_r}\,\mathrm{M} = \mathrm{S}\Big((i_r)\,\mathrm{M}^{(1)}_{m_1\,p_r}, \ldots.\ (i_r)\,\mathrm{M}^{(n)}_{m_n\,p_r}\Big),$$

dove si è scritto per semplicità $\mathrm{M}^{(s)}_{m_s\,p_r}$ invece che $\mathrm{M}^{(s)}_{(m_s\cdot\,p_r)}$.

Tenendo conto di questa relazione e della (1), si trova che

$$(2)\qquad \begin{aligned} \mathrm{P\,M} = \mathrm{S}\Big(&\mathrm{M}^{(1)}_{m_1\,p_1},\quad \mathrm{M}^{(2)}_{m_2 p_1}, \ldots\ldots\ldots\ \mathrm{M}^{(n)}_{m_n p_1},\\ &(i_2)\,\mathrm{M}^{(1)}_{m_1\,p_2},\ (i_2)\,\mathrm{M}^{(2)}_{m_2\,p_2}, \ldots\ldots\ (i_2)\ \mathrm{M}^{(n)}_{m_n\,p_2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &(i_n)\mathrm{M}^{(1)}_{m_1 p_n},\ (i_n)\,\mathrm{M}^{(2)}_{m_2 p_n}, \ldots\ldots\ (i_n)\,\mathrm{M}^{(n)}_{m_n\,p_n}\Big), \end{aligned}$$

od anche, poichè si è convenuto che $\mathrm{M}^{(s)}_{a}$ sia la stessa grandezza che $a\mathrm{M}^{(s)}$, e poichè per il principio commutativo già ammesso si ha $(i_q)\ a\,\mathrm{M}^{(r)} = a\ (i_q)\ \mathrm{M}^{(r)}$,

$$(3)\quad PM = S\Big(m_1 p_1 M^{(1)},\quad m_2 p_1 M^{(2)}, \ldots\ldots\ldots m_n p_1 M^{(n)},$$
$$m_1 p_2 (i_2) M^{(1)},\ m_2 p_2 (i_2) M^{(2)}, \ldots\ldots m_n p_2 (i_2) M^{(n)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$m_1 p_n (i_n) M^{(1)}, m_2 p_n (i_n) M^{(2)}, \ldots\ldots m_n p_n (i_n) M^{(n)}\Big).$$

Le grandezze come la $m_s\, p_r\, (i_r)\, M^{(s)}$ sono grandezze tutte della stessa classe, risultando dalla applicazione dello spostamento (i_r) ad un'unità $M^{(s)}$ (il che, per ipotesi dà una grandezza della classe), e da una successiva moltiplicazione per un numero reale $m_s\, p_r$, (che dà di nuovo una grandezza della classe): perciò la moltiplicazione in questa classe è possibile.

Tenendo conto che, per la formula precedente, si ha

$$P^{(r)} M^{(s)} = (i_r) M^{(s)},$$

potremo scrivere la formula precedente anche così:

$$(4)\quad PM = S\Big(m_1 p_1 P^{(1)} M^{(1)},\ m_2 p_1 P^{(1)} M^{(2)}, \ldots\ m_n p_1 P^{(1)} M^{(n)},$$
$$m_1 p_2 P^{(2)} M^{(1)},\ m_2 p_2 P^{(2)} M^{(2)}, \ldots\ m_n p_2 P^{(2)} M^{(n)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$m_1 p_n P^{(n)} M^{(1)},\ m_2 p_n P^{(n)} M^{(2)}, \ldots\ m_n p_n P^{(n)} M^{(n)}\Big).$$

Possiamo concludere che se in due classi di grandezze ad n dimensioni ed a sistema limitato si esigono veri (almeno in parte) i principii distributivo e commutativo per la moltiplicazione, la moltiplicazione fra due grandezze M e P delle due classi è sempre possibile.

Potrà quindi parlarsi di prodotto di grandezze di una medesima classe, ed in particolare di numeri complessi di una stessa classe a sistema limitato, ritenendo per spostamenti (i_r) da applicarsi al moltiplicando, corrispondenti agli spostamenti (i_r') che compariscono nel moltiplicatore, gli (i_r) stessi. Si cerchi allora il prodotto dei due numeri

$$a = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n\ ,\qquad b = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n\ ,$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sono rispettivamente le parti elementari di a, e $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ quelle di b; se $1^{(1)}, 1^{(2)}, \ldots 1^{(n)}$ sono i rispettivi numeri unità delle n sottoclassi elementari, e quindi, in generale, è

$$\alpha_r = a_r\ 1^{(r)},\quad \beta_r = b_r\ 1^{(r)},$$

dove a_r e b_r sono i numeri reali che rappresentano α_r e β_r nella loro sottoclasse elementare considerata come classe di numeri reali con $1^{(r)} = 1$, esso equivarrà al prodotto dei numeri

$$a = a_1 1^{(1)} + a_2 1^{(2)} + \ldots. + a_n 1^{(n)},\ b = b_1 1^{(1)} + b_2 1^{(2)} + \ldots.. + b_n 1^{(n)}:$$

e se si indichi ancora con (i_r) lo spostamento di $1^{(1)}$ in $1^{(r)}$, tale prodotto sarà dato per le (2) e (3) da

$$\begin{aligned}(5)\qquad ba = & \ a_1 b_1 1^{(1)} + a_2 b_1 1^{(2)} + \ldots. + a_n b_1 1^{(n)} + \\ & + (i_2)\, a_1 b_2 1^{(1)} + (i_2)\, a_2 b_2 1^{(2)} + \ldots. + (i_2)\, a_n b_2 1^{(n)} + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (i_n)\, a_1 b_n 1^{(1)} + (i_n)\, a_2 b_n 1^{(2)} + \ldots + (i_n)\, a_n b_n 1^{(n)} = \\ (6)\qquad & = a_1 b_1 1^{(1)} + a_2 b_1 1^{(2)} + \ldots\ldots + a_n b_1 1^{(n)} + \\ & + a_1 b_2 (i_2)\, 1^{(1)} + a_2 b_2 (i_2)\, 1^{(2)} + \ldots\ldots + a_n b_2 (i_2)\, 1^{(n)} + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_1 b_n (i_n) 1^{(1)} + a_2 b_n (i_n)\, 1^{(2)} + \ldots\ldots + a_n b_n (i_n)\, 1^{(n)},\end{aligned}$$

ed anche, per la (4), da

$$\begin{aligned}(7)\qquad ba = & \ a_1 b_1 1^{(1)} 1^{(1)} + a_2 b_1 1^{(1)} 1^{(2)} + \ldots\ldots + a_n b_1 1^{(1)} 1^{(n)} + \\ & + a_1 b_2 1^{(2)} 1^{(1)} + a_2 b_2 1^{(2)} 1^{(2)} + \ldots\ldots + a_n b_2 1^{(2)} 1^{(n)} + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_1 b_n 1^{(n)} 1^{(1)} + a_2 b_n 1^{(n)} 1^{(2)} + \ldots\ldots + a_n b_n 1^{(n)} 1^{(n)} = \\ & = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s\, a_r b_s\, 1^{(s)}\, 1^{(r)}.\end{aligned}$$

Per quanto si è detto in principio di questo paragrafo, se una delle grandezze (o dei numeri) fattori del prodotto è la grandezza modulo (risp. lo zero), anche il prodotto è la grandezza modulo. Che, viceversa, se il prodotto è la grandezza modulo debba necessariamente essere il modulo qualcuno dei fattori, non può in generale asserirsi (V. § seguente).

130. Possiamo proporci ora la domanda, se la moltiplicazione delle grandezze complesse goda di tutte le proprietà di quella fra grandezze reali. Si può dimostrare (Gauss) che se il numero delle dimensioni è maggiore di 2, oppure, essendo 2, le grandezze non sono le ordinarie grandezze complesse (V. Cap. seguente) per le quali fra le due unità $U^{(1)}$, $U^{(2)}$ si hanno le relazioni

$$U^{(1)}.\, U^{(1)} = U^{(1)}, \qquad U^{(1)}.\, U^{(2)} = U^{(2)}, \qquad U^{(2)}.\, U^{(2)} = -\, U^{(1)},$$

la moltiplicazione perde la proprietà caratteristica, che un prodotto non può essere la grandezza modulo, senza che, nella rispettiva classe, tale sia uno

dei fattori: e quindi che una classe complessa a sistema limitato a più di due dimensioni le cui operazioni soddisfino alle solite condizioni e nella quale il prodotto sia il modulo *soltanto* quando lo è un fattore, *non può esistere.*

Per dimostrare questa proprietà, basta limitarsi a provarla per le classi dei numeri complessi, giacchè queste classi corrispondono metricamente alle altre classi di grandezze, e le loro proprietà esprimono le corrispondenti delle classi di grandezze. Se $1^{(r)}$, $1^{(s)}$ sono due delle unità numeriche di sottoclassi elementari differenti, ed (i_s) è lo spostamento dell'unità principale $1^{(1)}$ sulla $1^{(s)}$, sarà, come già si è notato,

$$(i_s)\ 1^{(r)} = 1^{(s)}.\ 1^{(r)};$$

essendo la classe dei numeri a sistema limitato, dovrà per definizione essere $(i_s)\ 1^{(r)}$ (e quindi anche $1^{(s)}\,1^{(r)}$) un numero della medesima classe: e quindi, indicando con $a_{s,r}^{(p)}$ dei numeri reali dipendenti da r, da s e da p, dovrà essere, qualunque siano r ed s,

$$1^{(s)}\,1^{(r)} = a_{s,r}^{(1)}\ 1^{(1)} + a_{s,r}^{(2)}\ 1^{(2)} + \ldots + a_{s,r}^{(n)}\ 1^{(n)}.$$

Sarà in particolare:

$$1^{(1)}\,1^{(2)} = a_{1,2}^{(1)}\ 1^{(1)} + a_{1,2}^{(2)}\ 1^{(2)} + \ldots + a_{1,2}^{(n)}\ 1^{(n)},$$

$$1^{(1)}\,1^{(3)} = a_{1,3}^{(1)}\ 1^{(1)} + a_{1,3}^{(2)}\ 1^{(2)} + \ldots + a_{1,3}^{(n)}\ 1^{(n)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$1^{(1)}\,1^{(n)} = a_{1,n}^{(1)}\ 1^{(1)} + a_{1,n}^{(2)}\ 1^{(2)} + \ldots + a_{1,n}^{(n)}\ 1^{(n)},$$

cioè

$$-a_{1,2}^{(1)}\ 1^{(1)} = \left(a_{1,2}^{(2)} - 1^{(1)}\right)1^{(2)} + a_{1,2}^{(3)}\ 1^{(3)} + \ldots + a_{1,2}^{(n)}\ 1^{(n)},$$

$$-a_{1,3}^{(1)}\ 1^{(1)} = a_{1,3}^{(2)}\ 1^{(2)} + \left(a_{1,3}^{(3)} - 1^{(1)}\right)1^{(3)} + \ldots + a_{1,3}^{(n)}\ 1^{(n)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-a_{1,n}^{(1)}\ 1^{(n)} = a_{1,n}^{(2)}\ 1^{(2)} + a_{1,n}^{(3)}\ 1^{(3)} + \ldots + \left(a_{1,n}^{(n)} - 1^{(1)}\right)\ 1^{(n)}.$$

Queste equazioni possiamo risolverle rispetto ad $1^{(2)}$, $1^{(3)}, \ldots\ 1^{(n)}$; ciascuna incognita risulta espressa mediante una frazione, i cui termini sono due de-

terminanti, ciascuno di grado (n-1) rispetto ad $1^{(1)}$; quello del denominatore, che è comune per tutti, e che è

$$P = \begin{vmatrix} a^{(2)}_{1,2} - 1^{(1)}, & a^{(3)}_{1,2}, & \ldots\ldots & a^{(n)}_{1,2} \\ a^{(2)}_{1,3}, & a^{(3)}_{1,3} - 1^{(1)}, & \ldots & a^{(n)}_{1,3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{(2)}_{1,n}, & a^{(3)}_{1,n}, & \ldots\ldots & a^{(n)}_{1,n} - 1^{(1)} \end{vmatrix},$$

ha inoltre ± 1 per coefficiente di $(1^{(1)})^{n-1}$. Se quindi nella relazione

$$(1^{(1)})^2 = 1^{(1)}\,1^{(1)} = a^{(1)}_{1,1}\,1^{(1)} + a^{(2)}_{1,1}\,1^{(2)} + \ldots\ldots + a^{(n)}_{1,1}\,1^{(n)}$$

si sostituiscono ad $1^{(2)}, 1^{(3)}, \ldots\, 1^{(n)}$ i valori trovati, indi si riduce la relazione a forma intera moltiplicando per il denominatore comune P, si ottiene un equazione contenente $1^{(1)}$ alla potenza $(n\text{-}1) + 2 = n+1$, della forma

(1) $$(1^{(1)})^{n+1} + b_1\,(1^{(1)})^n + \ldots\ldots + b_{n+1} = 0\,,$$

dove le b sono numeri reali.

Ma l'equazione

$$x^{n+1} + b_1\,x^n + \ldots\ldots + b_{n+1} = 0$$

(se ci riferiamo alla teoria degli ordinari numeri complessi $m+ni$) ha, com'è noto, $n+1$ radici, che sono altrettanti numeri complessi (in particolare reali) di quelli ordinari a due dimensioni $mu_1 + mu_2$, tali che

$$u_1\,.\,u_1 = u_1 \quad , \quad u_1\,.\,u_2 = u_2\,.\,u_1 = u_1 \quad , \quad u_2\,.\,u_2 = -\,u_1\,;$$

ed indicando con $x_1, x_2, \ldots\, x_{n+1}$ queste radici, si ha:

$$x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_{n+1} = -\,b_1$$
$$x_1\,x_2 + x_1\,x_3 + \ldots\ldots + x_2\,x_3 + \ldots\ldots = b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_1\,x_2 \ldots\ldots x_n\;x_{n+1} = \pm\,b_{n+1}\,,$$

e quindi si ottiene l'identità

$$(1^{(1)})^{n+1} + b_1\,(1^{(1)})^n + \ldots\ldots + b_{n+1} = (1^{(1)})^{n+1} - (x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_{n+1})\,(1^{(1)})^n + \ldots$$
$$+ \ldots \pm x_1\,x_2 \ldots x_{n+1}\,,$$

od anche, se vogliamo che valgano le ordinarie regole di calcolo,

$$(1^{(1)})^{n+1} + b_1\,(1^{(1)})^n + \ldots\ldots + b_{n+1} = (1^{(1)} - x_1)\,(1^{(1)} - x_2) \ldots\ldots (1^{(1)} - x_{n+1}),$$

e perciò per la (1) deve essere

$$(1^{(1)} - x_1)\,(1^{(1)} - x_2) \ldots\ldots (1^{(1)} - x_{n+1}) = 0.$$

Se vogliamo conservata la proprietà che un prodotto non può essere zero se non lo è qualcuno dei fattori, dovrà essere $1^{(1)} - x_r = 0$, essendo x_r una delle x, e quindi $1^{(1)} = x_r$, ossia l' unità $1^{(1)}$ dev' essere uno degli ordinari numeri complessi. Potendosi ripetere lo stesso per $1^{(2)}, 1^{(3)}, \ldots,$ ne viene che la classe dei numeri complessi proposta si riduce a quella degli ordinari numeri complessi a due dimensioni. Se vogliamo che ciò non sia, il prodotto precedente sarà zero senza che lo sia nessuno dei suoi fattori, e la moltiplicazione avrà perso una delle sue proprietà caratteristiche (¹).

Le classi a cui ci limiteremo, volendo appunto che tali leggi siano soddisfatte, saranno quindi a due dimensioni, e precisamente quelle che conducono agli *ordinari* numeri complessi.

Capitolo VI.

Le ordinarie grandezze di classi a due dimensioni a sistema limitato.

Le ordinarie grandezze a due dimensioni e gli ordinari numeri complessi. — 131. Si è riconosciuto che le sole classi di grandezze complesse in cui è possibile una moltiplicazione che soddisfaccia alle ordinarie leggi, sono le ordinarie classi di grandezze complesse, i cui numeri, indicando con $1^{(1)}, 1^{(2)}$ le loro unità ($1^{(1)}$ l'unità principale), con (i_2) lo spostamento che conduce da $1^{(1)}$ a $1^{(2)}$, e con a, b dei numeri reali, sono della forma

$$a\ 1^{(1)} + b\,(i_2)\,1^{(1)} = a\ 1^{(1)} + b\ 1^{(2)},$$

e nelle quali per la moltiplicazione si ha la condizione

$$(i_2)\,1^{(2)} = 1^{(2)}\,1^{(2)} = -\,1^{(1)},$$

la quale dice che lo spostamento (i_2) applicato all'unità $1^{(2)}$ dà la grandezza opposta all'unità principale. Volendo che lo studio di tali numeri includa quello dei numeri reali (dimodochè la loro classe sia la classe di numeri più generale, se si vogliono rispettare le note leggi della moltiplicazione), basterà supporre

(¹) Hankel, op. cit. — Le considerazioni fatte in questo paragrafo, dipendendo dalla conoscenza degli ordinari numeri complessi, dovevano, a rigore, farsi dopo il capitolo seguente: ma tenuto conto che in tale capitolo non si svolge che il puro concetto e non la teoria completa dei numeri complessi e delle loro equazioni, avremmo anche allora dovuta supporre nota al lettore la teoria dell' equazioni, ed abbiamo preferito anticipare il teorema.

l'unità principale $1^{(1)}$ identica coll'unità 1 dei numeri reali: ponendo allora, come si suole, $1^{(2)} = i$, il numero complesso prenderà la forma ordinaria

$$a\,1 + bi = a + bi.$$

Le unità 1, i si diranno rispettivamente unità *principale* e *laterale* (Gauss) ed anche unità *reale* ed *immaginaria*; esse sodisfano alla condizione,

$$i\,i = -1\,,$$

e le classi di grandezze a cui appartengono questi numeri obbediscono quindi all'altra

$$u_2\,u_2 = -u_1\,,$$

essendo u_1 e u_2 le due unità della classe, delle quali la principale è u_1.

Viceversa, le classi che sodisfano a questa condizione hanno una moltiplicazione che gode le proprietà caratteristiche della moltiplicazione reale. In particolare, si può dimostrare che effettivamente un prodotto di due simili grandezze non è il modulo, altro che se almeno una delle grandezze sia il modulo essa stessa. Prendiamo infatti due grandezze P ed M di simili classi Γ' e Γ, tali quindi che si abbia

$$P = S'(p_1\,P^{(1)}, p_2\,P^{(2)}) \quad , \quad M = S(m_1\,M^{(1)}, m_2\,M^{(2)}),$$

e siano, per le ipotesi fatte sulla natura delle classi, soddisfatte le condizioni

$$(1) \qquad (i_2)\,P^{(2)} = -P^{(1)}, \quad (i_2)\,M^{(2)} = -M^{(1)}\,,$$

cioè

$$P^{(2)}\,P^{(2)} = -P^{(1)} \quad , \quad M^{(2)}\,M^{(2)} = -M^{(1)},$$

e, per quanto si è ammesso in generale nelle classi a sistema limitato (§ 129), anche le altre, dove a è un numero reale,

$$(2) \qquad a\left((i_2)\;M\right) = (i_2)\;a\;M = (i_2)\;S\left(a\;m_1\;M^{(1)}, a\;m_2\;M^{(2)}\right)$$

$$(3) \quad (i_2)\;S\left(a\;m_1\;M^{(1)}, a\;m_2\;M^{(2)}\right) = S\left((i_2)\;a\;m_1\;M^{(1)}, (i_2)\;a\;m_2\;M^{(2)}\right).$$

Sarà allora il prodotto M dato (§ 129) da

$$P\,M = S\left(m_1\,p_1\,M^{(1)}, m_2\,p_1\,M^{(2)}, m_1\,p_2\,(i_2)\,M^{(1)}, m_2\,p_2\,(i_2)\,M^{(2)}\right),$$

cioè, per la seconda delle (1),

$$(4) \quad P\,M = S\left(m_1\,p_1\,M^{(1)}, m_2\,p_1\,M^{(2)}, m_1\,p_2\,M^{(2)}, m_2\,p_2\,(-M^{(1)})\right) =$$

$$= S\left((m_1\,p_1 - m_2\,p_2)\;M^{(1)}, (m_2\,p_1 + m_1\,p_2)\;M^{(2)}\right).$$

Se ora il prodotto P M deve essere la grandezza modulo O di Γ, occorre che le sue parti elementari siano ambedue la grandezza modulo. Ma queste parti elementari sono prodotti di grandezze di una classe ad una dimensione per un numero reale, quindi (§ 106) non possono essere la grandezza modulo altro che se è zero il numero, o è il modulo la grandezza. Ma nè $M^{(1)}$ nè $M^{(2)}$ possono essere il modulo, essendo le unità delle sottoclassi elementari di una classe, quindi dovrà essere contemporaneamente

$$m_1 p_1 - m_2 p_2 = 0 \quad , \quad m_2 p_1 + m_1 p_2 = 0,$$

dalle quali si ha che

$$\text{o} \quad m_1 = 0 = m_2 \quad , \quad \text{o} \quad p_1 = 0 = p_2 \, ,$$

o contemporaneamente i due casi, per la qual cosa sarà o M = 0, o P = 0′, o contemporaneamente M = 0, P = 0′, dove 0 ed 0′ sono le grandezze moduli delle due classi. Il teorema è così dimostrato.

132. La formula (4) ci dà la forma del prodotto di due grandezze delle nostre classi.

Nel caso speciale in cui P sia il numero complesso $p_1 + p_2\, i$ ed M la solita grandezza, si avrà:

$$(p_1 + p_2\, i)\, M = \underset{\cdot}{S}\Big((m_1 p_1 - m_2 p_2)\ M^{(1)}, (m_2 p_1 + m_1 p_2)\ M^{(2)}\Big).$$

E se P ed M sono ambedue numeri complessi, cioè se

$$P = p_1 + p_2\, i \quad , \quad M = m_1 + m_2\, i \, ,$$

il prodotto sarà dato da

$$(p_1 + p_2\, i)\ (m_1 + m_2\, i) = (m_1 p_1 - m_2 p_2) + (m_2 p_1 + m_1 p_2)\, i.$$

La verificazione diretta, che tralasciamo non offrendo nessuna difficoltà, mostra che il prodotto di due grandezze delle classi complesse che ora studiamo è distributivo rispetto all'operazione S, è associativo, e, se le grandezze sono della medesima classe, è commutativo. Si ha di più la proprietà della dipendenza, ossia che se in un prodotto di due fattori (dei quali nessuno è il modulo) se ne cambia uno solo, cambia anche il prodotto. E infatti, siccome dalla formula generale

$$S\,(M\,P,\ N\,P) = S\,(M,\ N)\ P$$

si deduce l'altra

$$D\,(M\,P,\ N\,P) = D\,(M,\ N)\ P\,,$$

si ha che da M P = N P discende

$$0 = D\,(M,\ N)\ P\,;$$

e non essendo P il modulo, deve esserlo D (M, N), cioè M = N. E così, essendo S (P M, P N) = P S (M, N), da P M = P N si rileva pure M = N.

Il prodotto di due numeri complessi ordinari è in particolare anch'esso distributivo rispetto alla somma, associativo e commutativo, non è zero altro che quando è zero uno dei suoi fattori, e di più cambia al cambiare di uno solo dei fattori.

Si può notare che, essendo

$$(p_1 + p_2 i)(m_1 + m_2 i) = (m_1 p_1 - m_2 p_2) + (m_1 p_2 + m_2 p_1) i$$

e

$$P M = S\Big((m_1 p_1 - m_2 p_2) M^{(1)}, (m_1 p_2 + m_2 p_1) M^{(2)}\Big),$$

ed avendosi, poichè $M^{(2)} = (i_2) M^{(1)} = i M^{(1)}$,

$$P M = S\Big((m_1 p_1 - m_2 p_2) M^{(1)}, (m_1 p_2 + m_2 p_1) i M^{(1)}\Big) =$$

$$\Big((m_1 p_1 - m_2 p_2), (m_1 p_2 + m_2 p_1) i\Big) M^{(1)},$$

il prodotto di due grandezze è uguale al prodotto dell'unità principale del moltiplicando per il numero complesso, che è il prodotto dei numeri dei fattori rispetto alle unità principali rispettive.

133. Passando alla divisione di una grandezza per un'altra, dobbiamo al solito distinguere due casi; cioè, volendo che sia N = P M, il caso in cui siano date N ed M (omogenee) e si cerchi P, e quello in cui date N e P (non necessariamente omogenee) si cerchi M. Nel primo caso occorrerà che sia data la classe cui deve appartenere P ed in essa sia fissata l'unità principale; nel secondo la classe di M è nota, dovendo essere M omogenea con N, ma dev'esser fissata l'unità principale delle due classi. Nell'un caso e nell' altro il quoziente sarà noto, quando sia noto il suo numero rispetto all'unità principale scelta nella sua classe. Ma per il teorema del § precedente, il numero del prodotto di due grandezze è uguale al prodotto dei due numeri dei fattori; quindi il numero del quoziente di due grandezze è uguale al quoziente dei numeri delle grandezze stesse.

Per risolvere il problema generale della divisione, basta quindi risolvere quello speciale della divisione dei numeri. Ma la divisione fra due numeri $a+bi$ e $c+di$ è sempre possibile, quando il divisore $c+di$ è diverso

da zero, poichè il numero complesso

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{ad-bc}{c^2+d^2}\,i\,,\quad \text{con } c^2=c.c\,,\ d^2=d.d\,,$$

(il quale certamente esiste, perchè le divisioni che in esso compariscono, essendo da eseguire fra numeri reali e con divisore diverso da zero, sono possibili) è tale che moltiplicato per $c+di$ dà per prodotto $a+bi$. Di più è possibile in un modo solo, a causa della proprietà dimostrata per la moltiplicazione, che cioè cambia il prodotto cambiando uno dei fattori. Si può quindi concludere che la divisione fra due grandezze (e quindi in particolare fra una grandezza qualunque ed un numero) quando la grandezza divisore non è un modulo e, quando occorre, sia fissata la classe del divisore e siano stabilite le unità principali del dividendo e del divisore, è sempre possibile ed in un modo solo.

Se la divisione ha luogo fra grandezze omogenee, e per classe del quoziente si sceglie quella dei numeri complessi, il numero che si trova si dice *misura* della grandezza dividendo rispetto alla grandezza divisore presa per unità.

134. Quanto si è esposto nei precedenti paragrafi prova che, presa una grandezza qualunque di una classe complessa di quelle a due dimensioni che ora studiamo, se si moltiplica per una grandezza qualunque della sua classe, si ottiene un'altra grandezza omogenea, talchè le nostre classi sono classi anche rispetto alla moltiplicazione.

Di più, presa una grandezza fissa e supposto che non sia la grandezza modulo, si può applicare ad essa un numero complesso qualunque (cioè moltiplicarla per esso) e si ottiene così un'altra grandezza complessa della classe, e, viceversa, ogni grandezza della classe può ottenersi da essa (V. divisione, § 133) moltiplicandola per un numero complesso conveniente; e così a numeri eguali o disuguali corrispondono rispettivamente grandezze uguali o disuguali, e viceversa: e, per la proprietà distributiva del prodotto, una somma di numeri darà una grandezza risultante delle grandezze che provengono dai singoli numeri, e viceversa.

Ciò prova che, per far la teoria delle nostre grandezze complesse, non occorre prendere come unità quelle di una sottoclasse elementare, ma una grandezza qualunque della classe può servire allo scopo, e la classe dei

numeri che si otterrà sarà la stessa precedente; ossia, in altre parole, si può sempre stabilire una corrispondenza metrica fra una delle nostre classi e quella dei numeri complessi (e quindi anche fra due delle nostre classi complesse), facendo corrispondere ad una grandezza della prima una *qualunque* dell'altra (non il modulo). E allora, presa una grandezza M e l'altra (i_1) M=iM, e facendo corrispondere la prima al numero reale 1, se si vuole la corrispondenza metrica potremo fare insieme corrispondere iM al numero i; essendo individuata, come ora si è visto, una corrispondenza metrica fra la classe di grandezze e quella dei numeri, ed essendo ogni numero il risultato di $a.1+b.i$, dove a, b percorrono la classe dei numeri reali, potrà ogni grandezza della classe essere espressa da S (a M, $b\,i$ M), talchè le due sottoclassi aM, biM, dove a e b percorrono le classi dei numeri reali, ed M è una grandezza qualunque della classe, possono evidentemente compiere l'ufficio di sottoclassi elementari della classe.

Una classe speciale importante di grandezze complesse. Indici dei numeri complessi. — 135. Fra le classi di grandezze a due dimensioni a sistema limitato è importante quella formata dai segmenti di un piano, quando si dicano uguali due segmenti equipollenti (cioè sovrapponibili, paralleli e diretti nel medesimo senso) e l'operazione S sia l'operazione analoga a quella della composizione delle forze. Fissate due direzioni ad angolo retto, siccome ogni segmento si può ridurre ad essere risultante di due segmenti rispettivamente in quelle due direzioni, così ne viene che quella classe è a due dimensioni, ed in essa sono sottoclassi elementari quelle dei segmenti rispettivamente nelle due direzioni fissate.

Scelte due unità di egual lunghezza nelle due direzioni, si vede che un'operazione geometrica che serve a passare dall'unità principale (o reale) all'unità laterale (o immaginaria) è la rotazione della prima di un angolo retto in un determinato senso: cosicchè (i_1), rappresenta una rotazione di 90° in un dato senso. Le condizioni (2) e (3) del § 131 sono verificate: giacchè 1° o facendo rotare di 90° un segmento e indi moltiplicandolo per un numero reale, o moltiplicandolo prima per questo stesso numero e facendolo poi rotare di 90°, si giunge al medesimo risultato: 2° prendendo due segmenti, uno principale od uno laterale, e costruendone la risultante col cercare la diagonale del loro rettangolo e facendo poi rotare questa di 90°,

oppure facendo prima rotare di 90° i due segmenti e sommandoli dopo, si ottiene il medesimo segmento, giacchè il secondo rettangolo con la sua diagonale non sono che il primo e la sua diagonale fatti rotare appunto di 90°. Finalmente in questa classe è soddisfatta la condizione $U_2 \,.\, U_2 = - U_1$, giacchè, facendo rotare l'unità laterale di 90° nel medesimo senso in cui si è fatta rotare l'unità principale per avere quella laterale, si ottiene l'opposta dell'unità principale.

La classe citata è quindi di quelle classi a due dimensioni le quali, rispetto alla moltiplicazione, godono proprietà simili a quelle delle classi reali. A ciascuna delle sue grandezze corrisponderà quindi un numero complesso $a+bi$; per $a=0$ si avranno i segmenti della sottoclasse laterale, per $b=0$ quelli della sottoclasse principale.

Siccome per ciascun segmento del piano ce n'è sempre uno ed uno solo uguale (nel senso di questo paragrafo) che passa per un dato punto A, e ad ogni punto del piano corrisponde un segmento che ha per estremi esso punto ed A, e, viceversa, ad ogni segmento passante per A corrisponde un punto come suo secondo estremo, ne viene che ad ogni punto del piano corrisponde un numero complesso, e ad ogni numero complesso un punto del piano, che si dice il suo *indice*. L'indice di zero è il punto A (arbitrario) scelto per origine: e, fissate due rette arbitrarie ad angolo retto e prese le loro direzioni come quelle delle sottoclassi elementari, i loro punti saranno gl'indici dei numeri della forma rispettiva a e bi.

I segmenti di un piano passanti per un punto fisso (e quindi anche tutti i segmenti di un piano) e gli ordinari numeri complessi si corrispondono dunque metricamente; e siccome uno di quei segmenti è individuato da un punto del piano e viceversa, i punti del piano rappresentano completamente la classe dei numeri ordinari complessi dei quali sono gl'indici.

Capitolo VII.

I numeri e la misura nelle classi ad una dimensione di 2ª specie.

Insufficienza dei numeri reali fino nelle classi più semplici. Grandezze primarie. — 136. Esaminiamo come si possa applicare il concetto di misura nelle classi ad una dimensione di 2ª specie. Ci limiteremo a

trattare con qualche estensione il caso delle classi di 2ª specie che si possono decomporre in *n* sottoclassi principali tutte di 1ª specie: e, per avere classi più ampie che sia possibile, supporremo che le varie sottoclassi principali, *considerate isolate,* siano continue, talchè le nostre classi siano assolutamente chiuse (§§ 68, 69).

Incominciamo da una classe di 2ª specie che si scomponga in due sottoclassi principali. Per quanto stabilimmo, la 1ª sottoclasse (classe I) sarà quella delle grandezze maggiori, la 2ª (classe II) conterrà le grandezze minori. La classe II è continua (§ 69), la classe I è solo chiusa assolutamente, cioè di 1° e di 2° grado.

Si noti che, data una coppia di serie convergenti di 1° grado, non può dirsi (come si diceva per le classi di 1ª specie) che esiste per esse *un solo* limite, giacchè questa unicità si fonda (§ 46) sull'uguaglianza alla grandezza modulo delle grandezze minori di qualunque assegnabile: e siccome, quando si considera la convergenza di 1° grado, queste grandezze assegnabili sono quelle della classe I, la quale allorchè si studia l'intera classe non è isolata, non possono dirsi uguali al modulo le grandezze minori di quelle di I, cioè le grandezze di II; quindi quel teorema cessa di esser vero in generale.

La classe II, essendo l'ultima della classe totale, è tale che, se si considera la classe totale isolata, devono ritenersi uguali alla grandezza modulo le grandezze minori delle sue. Se ora consideriamo come uguali alla grandezza infinita Ω le grandezze di I, con che la classe II si viene a considerare isolata, la classe II è continua, onde le si possono applicare gli ordinari concetti di misura: e quindi, presa una sua grandezza E ($\gtreqless 0$) per unità di misura, ad ogni grandezza E' di essa corrisponde un numero reale, e viceversa. Parimente la classe I, quando si consideri isolata, è per ipotesi continua: talchè, presa in essa una grandezza B ($\gtreqless 0$) qualunque per unità di misura, ad un'altra qualunque B' corrisponde un numero reale, e viceversa. Ma se la classe I si considera tale qual'è, cioè non isolata, ed E è una grandezza qualunque della classe II, a tutte le infinite differenti grandezze S(B', E), B', D(B',E) devesi ritenere corrispondente rispetto a B uno stesso degli ordinari numeri, giacchè tutte quelle grandezze differiscono fra loro solo per grandezze di II, alle quali tutte, nell'applicare il consueto

concetto di misura alla classe I, corrisponde il numero 0. Gli ordinari numeri e gli ordinari concetti di misura sono quindi insufficienti per far corrispondere un diverso numero ad ogni grandezza di una classe di 2ª specie.

Scelta nella classe I l'unità B e scelto uno degli ordinari numeri reali *m*, a questo corrisponde una grandezza sola B', quando la I è isolata: la B' individua nella classe totale (o nella I non isolata) un gruppo di grandezze S (B' E), B', D (B', E) tutte differenti, una *qualunque* delle quali è corrispondente al numero *m*, quando la I è isolata. Occorre vedere quale elemento nella classe totale deve farsi concorrere col numero *m*, per individuare ciascuna di queste infinite grandezze.

137. Ogni grandezza B della classe I individua un *gruppo* formato dalle infinite grandezze D (B, E), B, S (B, E), con E grandezza qualunque di II: tutte queste grandezze (rispetto ad un'altra qualunque della classe) corrispondono ad un medesimo numero *m*, razionale od irrazionale, il quale, essendo relativo alla classe I isolata, nella quale si considerano solo le convergenze che nella classe totale si dicono di 1° grado, può chiamarsi *numero 1° grado*. Può dunque dirsi con più esattezza che nella classe I, considerata ora in relazione anche con la II, fissata una grandezza ad arbitrio, rispetto ad essa ad un *gruppo* qualunque di I corrisponde un numero di 1° grado, e viceversa. Questi gruppi individuati da ogni grandezza di I sono tali che nessuno di essi ammette nè grandezza massima, nè grandezza minima: perchè se P è grandezza di un gruppo, sono pure del gruppo stesso le grandezze S (P, E) e D (P, E), con E grandezza qualunque di II. La classe I non si può comporre soltanto di un numero finito di questi gruppi, essendovene uno per ogni numero, ma ne conterrà infiniti; di più la divergenza fra una grandezza qualunque di un gruppo ed una qualunque di un altro deve avere lo stato assoluto sempre maggiore dello stato assoluto di qualunque grandezza di II, altrimenti, se P è una grandezza di uno di questi gruppi, Q una di un altro, e se fosse D (P, Q) = E (grandezza di II), sarebbe P = S (Q, E), e quindi P del gruppo di Q, contro l'ipotesi.

L'ipotesi dell'isolamento della classe I, cioè dell'uguaglianza alla grandezza modulo di tutte le grandezze di II, corrisponde all'ipotesi dell'uguaglianza di tutte le grandezze di un medesimo gruppo, o alla scelta di *una sola* grandezza arbitraria per ogni gruppo, e poi alla considerazione della classe formata con queste grandezze scelte.

138. Presa una grandezza qualunque A di I ed il suo gruppo **A**, diremo che un'altra grandezza B pure di I (o il suo gruppo **B**) è *razionale* o *irrazionale* rispetto ad A (o al gruppo **A**), secondochè è razionale o irrazionale il numero del gruppo **B** preso rispetto al gruppo **A** nella classe isolata. Ciò posto, data una grandezza speciale di un gruppo, applicando ad essa un numero razionale col concetto ordinario di misura, col quale la classe si deve ritenere isolata, si ottiene una grandezza *qualunque* del gruppo razionale corrispondente a quel numero, giacchè tutte le grandezze del gruppo si considerano uguali; ma nel caso nostro, in cui I non deve ritenersi isolata e le grandezze di ogni gruppo devono essere considerate differenti, l'applicazione del numero razionale conduce ad una grandezza determinata del gruppo razionale corrispondente a quel numero, la quale deve ora ritenersi come distinta da tutte le altre del medesimo gruppo.

E che questa grandezza sia determinata, è chiaro. Infatti, supposta per es. la classe ad un senso, per cercare la grandezza corrispondente ad un numero razionale $\frac{m}{n}$ rispetto ad una grandezza B, bisogna prendere la parte aliquota di B secondo n, e di questa la multipla secondo m. Quanto alla parte aliquota $n$esima, cerchiamo il gruppo che è l'$n$esima parte del gruppo di B: esso esiste, giacchè se consideriamo I come isolata, essa è continua, ed esiste quindi (§ 57) la parte aliquota, secondo un numero qualunque, di una sua grandezza B. Se, nella I isolata, questa grandezza che è l'n esima parte di B s' indica con B', passando alla classe totale si deve cercare nel gruppo S (B' E), B', D (B', E) la grandezza che nella classe totale stessa è summultipla di B secondo n. Se questa non esistesse anche quando I non è isolata, potremmo dividere le grandezze del gruppo di B' in due parti, ponendo nella prima quelle le cui multiple secondo n sono $<$ B, e nell'altra quelle le cui multiple secondo n sono $>$B. Queste grandezze esistono le une e le altre. Infatti, se fosse B minore di tutte le multiple n esime delle grandezze del gruppo di B', avremmo che le grandezze n S (B', E), n B', n D (B', E) sarebbero tutte maggiori di B, e sarebbero tutte del gruppo di B: sarebbe $n\,B' > n\,D(B', E) > B$, e quindi anche

$$D\left(n\,B', n\,D(B', E)\right) < D(n\,B', B).$$

Ma $D\left(n\,B', n\,D(B', E)\right) = n\,E$, e D ($n$ B', B), essendo la divergenza fra due

grandezze determinate di un medesimo gruppo, è una determinata grandezza E' di II: quindi

$$n\,E < E'.$$

Ma E indica una grandezza qualunque di II, in particolare E': sarebbe quindi anche

$$n\,E' < E',$$

il che è assurdo. Parimente, se fosse B maggiore delle multiple $n$esime di tutte le grandezze di quel gruppo, avremmo $B > n\,S(B', E) > n\,B'$, e quindi

$$D\left(n\,S(B', E),\, n\,B'\right) < D(B, n\,B'),$$

cioè

$$n\,E < E',$$

che, come si è visto, è un assurdo, essendo E qualunque in II. Abbiamo quindi effettivamente nel nostro gruppo una divisione in due parti: mostriamo ora che di esse la prima è senza grandezza massima, la seconda senza grandezza minima. Infatti, essendo B_1 della prima parte del gruppo, sarà $n\,B_1 < B$: e se $D(B, n\,B_1) = E_1$, ed E'_1 è tale che $n\,E'_1 < E_1$, sarà

$$n\,S(B_1, E'_1) < B,$$

e quindi $S(B_1, E'_1)$ è ancora della prima parte del gruppo; essendo invece B_2 della seconda parte, sarà $n\,B_2 > B$: e se $D(n\,B_2, B) = E_2$, ed E'_2 è tale che $n\,E'_2 < E_2$, sarà

$$n\,D(B_2, E'_2) > B,$$

e quindi $D(B_2, E'_2)$ è ancora della seconda parte del gruppo. Nell'interno del nostro gruppo si ha quindi uno spezzamento. Allora, siccome le grandezze di questo gruppo sono date tutte dalla grandezza B' unita mediante le operazioni S o D a tutte le grandezze di II, dovremmo avere uno spezzamento anche nella classe II, il che è impossibile, essendo II continua. Deve quindi esistere nel gruppo la summultipla cercata di B: e simile conclusione si può evidentemente trarre anche nelle classi a due sensi, ripetendo il ragionamento precedente per gli stati assoluti delle loro grandezze. Le multiple della grandezza ora trovata sono grandezze determinate del gruppo corrispondente, giacchè si ottengono colle sole operazioni S. Si conclude quindi che, applicando un numero razionale (evidentemente anche se è negativo) ad una grandezza di I, si trova una grandezza determinata nel gruppo che ha quel numero razionale rispetto al gruppo che contiene la grandezza data.

Applichiamo invece a questa grandezza B di I un numero irrazionale. La grandezza risultante verrà definita come limite di serie convergenti di grandezze razionali; ma la convergenza di queste serie sarà una convergenza di primo grado, giacchè la divergenza fra le loro grandezze è razionale rispetto alla grandezza data di I, e quindi è soltanto una grandezza di I, e non di II. Queste serie individuano quindi una grandezza solamente quando I si considera isolata, e perciò fissano solo il gruppo cui essa appartiene quando I si considera nella classe totale. Siccome il numero irrazionale non dà altra legge che queste serie convergenti di 1° grado, così esso non potrà in nessun modo determinare che un gruppo di grandezze e non mai una grandezza unica. Di più, un *gruppo* non essendo individuato dalla *sola* grandezza B, ma anche da una qualunque delle infinite altre S (B, E), D (B, E), se ad una arbitraria delle grandezze del gruppo stesso applichiamo il medesimo numero irrazionale, otteniamo il medesimo gruppo, senza che ne venga determinata alcuna grandezza. Perchè ad ogni numero corrisponda una grandezza determinata ed una sola, occorre precisare di più la definizione di numero irrazionale, dimodochè esso individui non solo un gruppo ma una grandezza determinata di ogni gruppo, la quale di più risulti differente secondo le differenti grandezze S (B, E), B, D (B, E) da cui si parte: precisamente come partendo da queste grandezze ed applicando loro il medesimo numero razionale *m*, si hanno grandezze determinate e *differenti* di un medesimo gruppo.

139. Per raggiungere questo scopo, cominciamo coll'osservare che tutti i gruppi hanno un modo identico di costituzione. Infatti, fissata in ciascuno di essi una grandezza B, tutte le grandezze del gruppo sono date da D (B, E), B, S (B, E), dove E percorre tutte le grandezze di II: quelle grandezze corrispondono dunque termine a termine con quelle della classe II (se essa è a due sensi) o della classe che si ottiene da essa (se è ad un senso) aggiungendovi le grandezze (ideali, se occorre) opposte alle sue. Intendendo che II sia o si sia ridotta ad essere a due sensi, tutte le grandezze del gruppo si possono ora anche indicare con S (B, E), dove E rappresenta grandezze positive o negative, o il modulo. Nella corrispondenza termine a termine di ogni gruppo con II, B corrisponda, per es., alla grandezza modulo O; allora S (B, E) corrisponde ad E: se $E' \gtreqless E''$, le due grandezze corrispon-

denti S(B, E′), S(B, E″) sono tali che rispettivamente

$$S(B, E') \gtreqless S(B, E''):$$

ad S(E′, E″) corrisponde $S\Big(B, S(E', E'')\Big)$. Questa corrispondenza è uniforme per tutti i gruppi, ma resta arbitraria in ogni gruppo la grandezza da farsi corrispondere ad una data grandezza qualunque di II, per es. alla grandezza modulo O. Tutte le grandezze dei diversi gruppi che allora vengono a corrispondere ad una grandezza di II, per es. ad O, hanno così una corrispondenza fra loro; ma questa osservazione suggerisce di non lasciare del tutto arbitraria la scelta di queste grandezze in tutti i gruppi. Infatti, fissando effettivamente di prendere come grandezza di II, a cui si fa corrispondere nei gruppi la grandezza arbitraria, la grandezza modulo O, ed osservando che se m è un numero qualunque si ha $m\,O = O$, è chiaro che sarà utile far sì che, se B è la grandezza di un certo gruppo che corririsponde ad O, la grandezza che corrisponde ad O in quel gruppo che rispetto a quello ha il numero m, sia m B. Ma se m è un numero razionale, alla grandezza B di un gruppo corrisponde una grandezza *determinata* m B del gruppo che rispetto all'altro ha il numero m, mentre se m è irrazionale questa corrispondenza non è determinata; quindi, se in un gruppo è fissata la grandezza B che corrisponde ad O, in tutti i gruppi razionali rispetto ad esso e corrispondenti ai varii numeri m risulta pure fissata ed è la grandezza m B, mentre nei gruppi irrazionali non resta fissata neanche da queste considerazioni. Ma non in tutti questi gruppi irrazionali è conveniente prenderla ad arbitrio, giacchè vogliamo, per la semplicità della misura, che la grandezza scelta in un gruppo il quale è la risultante di più gruppi dati sia precisamente la risultante delle grandezze singole scelte in quei singoli gruppi: e quindi, in generale, che se B e C sono le grandezze scelte a corrispondere ai numeri p e q, sia S(B, C) la grandezza scelta per corrispondere a $p+q$. Chiamando *corrispondenti* le grandezze di ciascun gruppo che si fanno corrispondere alla grandezza O della classe II, abbiamo dunque che, presa una certa grandezza B determinata di un certo gruppo, che si dirà gruppo 1, la sua corrispondente in tutti i gruppi razionali m è determinata, ed è m B. L'insieme di questi gruppi razionali potrà dirsi l'*aggruppamento razionale* M. Preso un gruppo irrazionale rispetto a B, fisseremo

in esso una grandezza ad arbitrio; ma tutte le corrispondenti dei gruppi razionali rispetto ad esso risulteranno fissate. Se quel gruppo corrisponde al numero irrazionale m_1, e si indica con B_1 la grandezza scelta arbitrariamente in esso, le grandezze corrispondenti dei gruppi αm_1 (α razionale) sono determinate, e sono αB_1. Di più risultano fissate le grandezze di tutti i gruppi che sono la risultante o la divergenza di gruppi di M cogli altri gruppi ora esaminati, giacchè, per quanto si è detto, esse devono essere rispettivamente la risultante e la divergenza delle grandezze fissate nei gruppi. Preso un altro gruppo qualunque che non sia razionale rispetto a B_1 oppure alle risultanti o alle divergenze ora accennate, in esso potremo scegliere una grandezza qualunque B_2: le grandezze corrispondenti dei gruppi razionali rispetto ad esso e aventi il numero α sono determinate, e sono αB_2. Del pari sono determinate le grandezze dei gruppi che sono la risultante di un gruppo qualunque che è razionale con B_2 e di uno qualunque dei precedenti già trovati, dovendo essere la risultante delle grandezze già scelte negli uni e negli altri ecc. ecc.

Le grandezze che, secondo le regole stabilite, si scelgono in ogni gruppo, (tali quindi che, se α è un numero razionale e B è la grandezza di un gruppo, quella del gruppo che rispetto ad esso ha il numero α sia α B, e se B_1 e B_2 sono le grandezze scelte in due gruppi sia $S(B_1, B_2)$ la grandezza scelta nel gruppo che è la loro risultante, e $D(B_1, B_2)$ quella del gruppo che è la loro divergenza), grandezze, le quali, come si è mostrato, sono in parte arbitrarie e in parte no, si diranno le *grandezze primarie* dei singoli gruppi.

In questo modo, se A è una grandezza qualunque presa per unità, ed α è un numero qualunque (razionale oppure, ora, anche irrazionale), ad esso corrisponde non solo un gruppo determinato, ma, in questo, una grandezza determinata, che è la grandezza primaria del gruppo α. E così ad ogni numero reale può ora farsi corrispondere una grandezza determinata ed una sola: e ad ogni grandezza primaria corrisponde un numero ed uno solo.

Se come uno dei gruppi speciali della classe totale prendiamo anche la classe II, nella quale come grandezza primaria si può assumere la grandezza modulo, tutte le grandezze primarie di una classe di seconda specie decomponibile in due sole sottoclassi principali le quali, considerate isolate,

siano ambedue continue (com'è quella di cui ora ci occupiamo), formano una classe continua, nella quale effettivamente ad ogni numero reale corrisponde una ed una sola grandezza.

La scelta delle grandezze che restano arbitrarie è soggetta ad alcune condizioni: i singoli casi mostreranno quale sia la regola opportuna da seguirsi.

Se A è la grandezza arbitraria unità (presa a base per la formazione delle grandezze primarie), al suo gruppo corrisponde il numero 1: la grandezza primaria corrispondente al numero α si indicherà con A_α. La classe delle A_α è quindi, per quanto si è detto, continua. In essa, se $\alpha \gtreqless \beta$ è

$A_\alpha \gtreqless A_\beta$, e di più $A_{2\alpha} = 2A_\alpha$, $A_{3\alpha} = 3A_\alpha$, ... $A_{m\alpha} = mA_\alpha$, $A_{\frac{p}{q}\alpha} = \frac{p}{q} A_\alpha$,

e, in generale, $A_{\alpha+\beta} = S(A_\alpha, A_\beta)$, $A_{\alpha-\beta} = D(A_\alpha, A_\beta)$. In altre parole, facendo corrispondere A_α al numero α, la corrispondenza fra la classe delle grandezze primarie e quella dei numeri reali è una corrispondenza metrica (§§ 92, 94).

I numeri del 2° grado e la misura. — 140. Vediamo ora come i ragionamenti precedenti ci possano condurre al concetto di misura.

Intenderemo dapprima che, per grandezza unità nella classe I in cui vogliamo fare la misura, si assuma quella grandezza A che è stata scelta come unità per costruire la sottoclasse delle grandezze primarie: e che questa classe delle grandezze primarie sia stata effettivamente costruita.

Data una grandezza B di I e presa A per unità, al gruppo di B corrisponde un numero reale α, ed A_α è la grandezza primaria del gruppo di B. Allora la grandezza $D(B, A_\alpha)$ è una grandezza E' della classe II (supposto, come si è notato, che quella sia a due sensi o vi si sia ridotta), onde sarà

$$B = S(A_\alpha, E').$$

Nella classe II fissiamo una grandezza ad arbitrio E, e prendiamola come unità nella classe stessa; allora, considerata II come isolata, cioè ritenute uguali ad Ω tutte le grandezze di I, ad E' rispetto ad E corrisponderà uno degli ordinari numeri reali ed uno solo, che sia β. Sarà $E' = \beta E$, onde

$$B = S(A_\alpha, \beta E) = S(A_\alpha, E_\beta),$$

potendosi una classe continua, qual'è II, considerare come una classe di grandezze primarie rispetto alla classe stessa, e quindi potendo β E indicarsi con E_β. Alla grandezza B, rispetto alle unità A ed E ed alla classe Γ delle grandezze primarie, corrisponde quindi la coppia di numeri (α, β) e questa sola, perchè cambiando β cambia E', e quindi cambia la grandezza nel gruppo α, mentre cambiando α si cambia il gruppo. Viceversa, dati due numeri α e β, le unità rispettive A ed E e la classe Γ, a quella coppia di numeri corrisponde sempre una grandezza ed una sola. Infatti, α individua un gruppo rispetto ad A, e quindi individua la grandezza primaria A_α : β individua la grandezza $E' = \beta E = E_\beta$ in II; quindi la grandezza $S(A_\alpha, E_\beta)$, e soltanto quella, corrisponde alla coppia (α, β).

In questo modo, alle coppie di numeri $(\alpha, 0)$ corrispondono le grandezze primarie delle classe; alle coppie $(0, \beta)$ le grandezze di II; ai numeri (α, β), con $\alpha \gtreqless 0$, $\beta \gtreqless 0$, le grandezze non primarie di I: a $(0, 0)$ la grandezza modulo della classe II, che è anche la grandezza modulo della classe data di 2ª specie.

I numeri β possono essere positivi o negativi; i numeri α saranno soltanto positivi, oppure anche negativi, secondochè la classe nostra sarà ad un sol senso o a due sensi. Supporremo, per maggior generalità, che α e β possano prendere valori qualunque, positivi o negativi.

Come dunque si vede, date in una classe le due unità A ed E e la classe Γ, la misura di una grandezza qualunque si ottiene mediante due numeri reali α e β, i quali indicano che si devono prendere la grandezza primaria A_α e la grandezza E_β, e farne la risultante. E siccome A_α (nella sottoclasse Γ) si è visto doversi ritenere uguale ad α A, possiamo così dire che la coppia (α, β) indica che si devono prendere le due grandezze che nelle classi Γ e II corrispondono rispettivamente ai numeri α e β, e indi farne le risultanti; e che, viceversa, la misura di una grandezza B corrisponde alla ricerca della grandezza P della classe Γ da ritenersi (in questa classe considerata isolata) uguale ad essa, ed alla successiva ricerca dei numeri α e β corrispondenti alle grandezze P e D (B, P) rispettivamente nelle classi Γ e II.

141. I numeri α, β sono numeri reali; uno di essi dev'essere applicato alla grandezza A unità di I, l'altro alla grandezza E unità di II. Intendendo che β_1 indichi passaggio dall' unità A di I all'unità E di II e successiva mol-

tiplicazione per β numero reale, e α_0 indichi passaggio da A alla grandezza primaria A_α, possiamo dire che ad ogni grandezza B della nostra classe rispetto ad un' unità A corrisponde la coppia (α_0, β_1). Potremo adottar questo simbolo, e, per brevità, scrivere anche α_0 invece di $(\alpha_0, 0)$ e β_1 invece di $(0, \beta_1)$, riserbando ai simboli α senza nessun indice il significato di ordinari numeri reali, che per altro indichino solo passaggio da un gruppo dato ad un altro.

È allora evidente che se B corrisponde a (α_0, β_1) e C a (γ_0, δ_1), a S (B, C) corrisponde $(\alpha_0+\gamma_0, \beta_1+\delta_1)$, poichè il gruppo di S (B, C) per gli ordinari concetti di misura corrisponde al numero $\alpha+\gamma$, e $A_{\alpha+\gamma} = S(A_\alpha, A_\gamma)$, onde

$$D\left(S(B, C), A_{\alpha+\gamma}\right) = D\left(S(B, C), S(A_\alpha, A_\gamma)\right) = S\left(D(B, A_\alpha), D(C, A_\gamma)\right) =$$
$$S(E_\beta, E_\delta) = E_{\beta+\delta};$$

che ad A corrisponde il numero 1_0, ad $E_\beta = \beta E$ il numero β_1 ecc. Per indicare che a B rispetto all'unità A (e a quella che se ne deduce E) ed alla classe Γ corrisponde la coppia di numeri (α_0, β_1), scriveremo

$$B = A_{(\alpha_0, \beta_1)}$$

Possiamo ritenere l' insieme (α_0, β_1) di due numeri α_0 e β_1 come un nuovo numero; ed abbiamo così per ogni grandezza della classe un numero, e viceversa. Questi numeri che corrispondono uno ad uno alle grandezze della nostra classe, li introdurremo coi concetti generali (§ 79); diremo quindi *uguali* o *disuguali* due numeri secondochè corrispondono a grandezze uguali o disuguali: diremo *maggiore* quello di due numeri che corrisponde a grandezza maggiore e *minore* l'altro: e se un numero corrisponde alla risultante di più grandezze, esso si dirà *somma* dei numeri corrispondenti a queste grandezze. Si ha quindi che se

$$(\alpha_0, \beta_1) = (\gamma_0, \delta_1),$$

dev'essere

$$\alpha_0 = \gamma_0, \beta_1 = \delta_1,$$

e viceversa. Se

$$(\alpha_0, \beta_1) = (m_0, n_1) + (p_0, q_1)$$

dovrà essere $\alpha_0 = (m+p)_0, \beta_1 = (n+q)_1$, e quindi

$$(m_0, n_1) + (p_0, q_1) = \left((m+p)_0, (n+q)_1\right).$$

In tal caso avremo che

$$(\alpha_0, \beta_1) = \left((\alpha+0)_0, (0+\beta)_1\right) = (\alpha_0, 0) + (0, \beta_1) = \alpha_0 + \beta_1,$$

onde i nostri numeri potremo indicarli col simbolo più comodo $\alpha_0+\beta_1$. I numeri α_0 e β_1 sono da considerarsi come distinti dagli ordinari numeri reali; poichè α_0 indica in qualunque caso passaggio da A ad una *determinata* grandezza di un determinato gruppo, mentre α, nei casi in cui è irrazionale, indica il passaggio ad una grandezza *qualunque* di un gruppo determinato, per la qual cosa intenderemo per analogia, che, come già si è detto, sia lo stesso anche quando α è razionale, c' α rappresenti solo passaggio da grandezza a grandezza nelle classi come II in cui tutte le grandezze di ogni gruppo sono da considerarsi come uguali: β_1 indica un passaggio da A ad E e di poi l'applicazione dell' ordinario numero β; onde propriamente, colle antiche notazioni, $\alpha_0 = (\alpha, 0)$, $\beta_1 = (0, \beta)$.

I numeri ordinari α li diremo *numeri di* 1° *grado*: i numeri attuali costituiti da coppie $(\alpha_0, \beta_1) = \alpha_0+\beta_1$, potendo essere $\alpha_0 = 0$ o $\beta_1 = 0$, li diremo *numeri di 2° grado.*

La classe dei numeri di 2° grado è di 2ª specie. In essa si ha il fatto che due serie che sono convergenti nella classe dei numeri reali non sono più tali nella classe totale, ed hanno infiniti limiti, i quali sono tutti uguali nella classe (isolata) dei numeri reali. Uno di essi si può scegliere per numero primario: la classe dei numeri primari, isolata, è la classe dei numeri reali.

142. Vediamo ora se la misura delle grandezze della classe nostra di 2ª specie si può fare coi numeri ora introdotti e colla sola classe di grandezze primarie scelte, quand'anche si prenda per unità un' altra grandezza che non sia quella A scelta per costruire la sottoclasse delle grandezze primarie.

Diremo *misura* di una grandezza C rispetto ad un'altra grandezza B il numero che corrisponde a C, quando B si prenda per unità. Cerchiamo questa misura, quando si conoscono quelle di B e di C rispetto ad un' unità A già scelta in precedenza.

A questo scopo incominciamo col risolvere il problema inverso, cioè, data una grandezza ed un numero, cercare la grandezza che, rispetto a

quella data, ha per numero il numero dato. L'operazione necessaria la diremo *moltiplicazione*, il risultato *prodotto*, la grandezza *moltiplicando*, il numero *moltiplicatore*. Per risolvere il problema proposto, dovremo sulla grandezza data applicare la legge corrispondente al numero dato come moltiplicatore. La moltiplicazione per un numero di 1° grado, per la convenzione fatta (§ 141), condurrà ad una grandezza indeterminata del gruppo che ha quel numero rispetto al gruppo della grandezza data.

Vediamo ora qual risultato dia la moltiplicazione per un numero $\alpha_0+\beta_1$ del 2° grado. Indicheremo il prodotto di B per $\alpha_0+\beta_1$ con $(\alpha_0+\beta_1)$ B.

Se A è la grandezza scelta per costruire la classe delle grandezze primarie (classe che si suppone data), è chiaro che, per la definizione stessa,

$$(\alpha_0+\beta_1)\,A = A_{\alpha_0+\beta_1}\,;\quad \alpha_0\,A = A_{\alpha_0}\,;\quad \beta_1\,A = A_{\beta_1}\,,$$

e quindi

(1) $$(\alpha_0+\beta_1)\,A = A_{\alpha_0+\beta_1} = S\,(A_{\alpha_0}, A_{\beta_1}) = S\,(\alpha_0\,A, \beta_1\,A)\,.$$

Esaminiamo ora i risultati della moltiplicazione di grandezze differenti da A.

Sia dapprima una grandezza $C = A_{m_0}$, e si voglia moltiplicare per il numero di 2° grado α_0. Dovremo considerare A_{m_0} come un'unità A, costruire la *relativa* classe Γ di grandezze primarie, e prendere la grandezza primaria $(A_{m_0})_{\alpha_0}$. Dovremo in certi gruppi fissare una grandezza arbitraria; ma affinchè vi sia un legame fra il sistema di grandezze che ora si considerano e quello relativo ad A, e notando che dev'essere in ogni caso, per le nostre relazioni,

$$\alpha_0\,(A_{m_0}) = (A_{m_0})_{\alpha_0}\,,$$

e se α_0 è razionale (per il modo con cui si sono prese le grandezze primarie rispetto ad A) è

$$\alpha_0\,(A_{m_0}) = A_{(m\alpha)_0}\,,$$

e quindi in quel caso

$$(A_{m_0})_{\alpha_0} = A_{(m\alpha)_0}\,,$$

mentre se α_0 è irrazionale resta indeterminata la grandezza del gruppo $(A_{m_0})_{\alpha_0}$ da farsi corrispondere ad A_{m_0}, prenderemo in ogni caso $(A_{m_0})_{\alpha_0} = A_{(m\alpha)_0}$, con che si vede subito che le nuove grandezze primarie rispetto ad A_{m_0} sono le stesse di quelle rispetto ad A, e le une sono legate alle altre dalla relazione precedente, cioè

(2) $$(A_{m_0})_{\alpha_0} = A_{\beta_0}\,,\quad \text{con } \beta = m\alpha.$$

Se poi $C=A_{m_0}$ si voglia moltiplicare per un numero β_1, occorre applicare ad A_{m_0} la legge indicata da β_1, il quale numero indica passaggio dall' unità A all'unità E con successiva moltiplicazione per il numero di 1° grado β. L'unità E della classe II è arbitraria, ed arbitraria resterà quindi quella da scegliersi ora come corrispondente a C, cioè la grandezza $1_1 . (A_{m_0})$. Ma avendo scelto E come unità quando era unità A, converremo di prendere per unità in II una grandezza che in II abbia, rispetto ad E, lo stesso numero che A_{m_0} ha rispetto ad A, cioè m_0, il qual numero, nella classe di 1° grado II, equivale ad un numero di 1° grado m. Sarà quindi

$$1_1 . (A_{m_0}) = m\,E,$$

e perciò

$$\beta_1 (A_{m_0}) = \beta (m\,E) = E_{(m\beta)} = A_{(m\beta)_1}.$$

Se infine si vuol moltiplicare A_{m_0} per $\alpha_0+\beta_1$, otterremo evidentemente, per le cose dette, $S\left(A_{(m\alpha)_0}\ ,\ A_{(m\beta)_1}\right)$, onde sarà

$$(\alpha_0+\beta_1)\ A_{m_0} = A_{(m\alpha)_0+(m\beta)_1}\ ,$$

od anche, poichè

$$(\alpha_0+\beta_1)\,A_{m_0} = (\alpha_0+\beta_1)\,(m_0\,A)\ ,\ A_{(m\alpha)_0+(m\beta)_1} = S\left((m\,\alpha)_0\,A,\,(m\,\beta)_1\,A\right),$$

potrà scriversi

$$(3) \qquad (\alpha_0+\beta_1)\,(m_0\,A) = S\left((m\alpha)_0\,A\ ,\ (m\beta)_1\,A\right).$$

Il caso ora trattato è quello in cui la grandezza moltiplicando A_{m_0} è misurata rispetto ad A da un numero $(m_0, 0)$. Supponiamo ora invece che la grandezza C sia misurata da un numero $(0, n_1)$, e sia quindi $C=A_{n_1}$. Se si deve moltiplicare per $(\alpha_0, 0)$, cioè per α_0, dovremo con $\alpha_0\,C$ intendere la grandezza primaria C_{α_0}. Ma siccome $C = A_{n_1} = n\,E$ è una grandezza di II, ed in II le grandezze primarie coincidono colle grandezze effettive della classe, sarà

$$\alpha_0\,C = C_{\alpha_0} = \alpha\,(n\,E) = (\alpha\,n)\,E = A_{(\alpha n)_1}.$$

Se si deve moltiplicare per $(0, \beta_1)$, dovremo fare su A_{n_1}, cioè su $n\,E$, un'operazione corrispondente al passaggio dalla classe I alla classe II, ossia ad una grandezza minore di qualunque assegnabile in I; ma essendo per ipotesi la classe completa decomponibile in due sole sottoclassi, la II è l'ul-

tima della decomposizione, e quindi la sola grandezza modulo 0 è minore di qualunque assegnabile in II; talchè dovremo porre

$$\beta_1\, C = \beta_1\, A_{1_1} = 0.$$

Se poi si deve moltiplicare per $(\alpha_0 + \beta_1)$, si vede subito che risulterà

$$(\alpha_0 + \beta_1)\, C = (\alpha_0 + \beta_1)\, A_{n_1} = S\,(A_{(\alpha n)_1},\, 0) = A_{(\alpha n)_1}\,,$$

ossia

(4) $$(\alpha_0 + \beta_1)\;(n_1\, A) = (\alpha\, n)_1\, A.$$

Supponendo per ultimo caso che C sia misurato da un numero (m_0, n_1) dove nè m ne n sono lo zero, sarà da cercare il prodotto $(\alpha_0 + \beta_1)\, A_{m_0+n_1}$.

Se si deve moltiplicare per $(\alpha_0, 0)$ dovremo per $\alpha_0\, A_{m_0+n_1}$ intendere la grandezza primaria $C_{\alpha_0} = (A_{m_0+n_1})_{\alpha_0}$. Quando α_0 è razionale, questa grandezza è necessariamente $A_{(m\alpha)_0+(n\alpha)_1}$; quando α_0 è irrazionale risulta determinato solo il gruppo, che è evidentemente quello di $A_{(m\alpha)}$ cioè quello di $A_{(m\alpha)_0+(n\alpha)_1}$, e non la grandezza in esso. Ma affinchè valga in ogni caso la formula che deve valere per α_0 razionale, prenderemo per grandezza C_{α_0} quella definita da

$$C_{\alpha_0} = (A_{m_0+n_1})_{\alpha_0} = A_{(m\alpha)_0+(n\alpha)_1},$$

con che si vede che le nuove grandezze primarie rispetto a C restano completamente individuate da quelle di A, e sono definite dalle relazioni

$$C_{\alpha_0} = (A_{m_0+n_1})_{\alpha_0} = A_{p_0+q_1}\,, \quad \text{con } p = m\,\alpha\,,\ q = n\,\alpha.$$

Se poi C si vuol moltiplicare per $(0, \beta_1)$, occorre passare da C alla grandezza che è formata da C come E da A, e poi moltiplicare per β. Ma poichè $C = A_{m_0+n_1} = S\,(A_{m_0}\,,\ E_{n_1})$ ed E si ha da A passando dall'unità di I a quella di II, così $1_1.C$ si otterrà passando da C alla grandezza di II che, rispetto ad E, ha lo stesso numero che C rispetto ad A: sarà quindi

$$1_1\, C = 1_1\, (A_{m_0+n_1}) = E_{m_0} = A_{m_1}\,,$$

e perciò

$$\beta_1\, C = \beta_1\, (A_{m_0+n_1}) = A_{(\beta m)_1} = (\beta m)_1\, A.$$

Finalmente, volendo moltiplicare C per $\alpha_0 + \beta_1$, è evidente che dovremo costruire $S\,(\alpha_0\, C,\, \beta_1\, C)$, e quindi il risultato sarà

(5) $$(\alpha_0 + \beta_1)\, A_{m_0+n_1} = S\left(A_{(m\alpha)_0+(n\alpha)_1}\,, A_{(m\beta)_1}\right) = A_{(m\alpha)_0+(n\alpha+m\beta)_1}\,.$$

Questo risultato si vede che include anche i precedenti; onde riassumendo si può dire:

" Limitando convenientemente l' arbitrarietà della scelta della gran-
" dezze primarie in un gruppo che risulti da moltiplicazione per numeri ir-
" razionali, e limitandola in modo che niente v'è d'arbitrario all'infuori della
" scelta già fatta in precedenza delle grandezze primarie corrispondenti ad A,
" il prodotto di una grandezza della classe totale per un numero del 2° grado
" $\alpha_0 + \beta_1$ è di nuovo una grandezza della classe totale, e precisamente

$$(6) \qquad (\alpha_0 + \beta_1)\, A_{m_0+n_1} = A_{(m\alpha)_0+(m\beta+n\alpha)_1},$$

" cioè, essendo per le (1) $A_{p_0+q_1} = (p_0 + q_1)\, A$,

$$(7) \qquad (\alpha_0 + \beta_1)\Big((m_0 + n_1)\, A\Big) = \Big((m\alpha)_0 + (m\beta+n\alpha)_1\Big)\, A \text{ ''}.$$

Se la classe data era quella dei numeri, si avrà che in quella classe esiste il prodotto di due suoi numeri qualunque $\alpha_0+\beta_1$ e m_0+n_1, ed è dato da

$$(8) \qquad (\alpha_0+\beta_1)\,(m_0+n_1) = (m\alpha)_0 + (m\beta+n\alpha)_1.$$

Si vede di qui che il prodotto di due numeri di 2° grado è commutativo, associativo e distributivo rispetto all'operazione addizione. Si vede di più che il prodotto di una grandezza per un numero è una grandezza che, rispetto ad A, ha per numero il prodotto del numero dato per il numero della grandezza data.

143. Proponendosi ora l' altro problema, cioè, data una grandezza $P = A_{p_0+q_1}$ ed un numero $\alpha_0+\beta_1$ cercare una grandezza $X = A_{x_0+y_1}$ tale che il suo prodotto per $\alpha_0+\beta_1$ sia P, o, viceversa, data P ed una grandezza omogenea $Q = \alpha_0+\beta_1$ cercare un numero x_0+y_1 tale che il suo prodotto per Q sia P, si vede che dovremo avere rispettivamente

$$(\alpha_0+\beta_1)A_{x_0+y_1} = A_{p_0+q_1}\,;\; (x_0+y_1)\, A_{\alpha_0+\beta_1} = A_{p_0+q_1},$$

e quindi, in ambedue i casi, dovrà essere (§ 142)

$$(\alpha_0+\beta_1)\,(x_0+y_1) = p_0+q_1,$$

cioè

$$(\alpha x)_0 + (\beta x+\alpha y)_1 = p_0+q_1:$$

per cui dovremo avere

$$\alpha x = p, \qquad \beta x + \alpha y = q,$$

donde, se α non è zero, come supporremo, si ha

$$x = \frac{p}{\alpha}, \; y = \frac{q-\beta x}{\alpha} = \frac{\alpha q - \beta p}{\alpha^2};$$

talchè il numero x_0+y_1 o la grandezza $A_{x_0+y_1}$ e soltanto questi risolvono rispettivamente il problema proposto. Il numero o la grandezza trovati si dicono *quoziente* della divisione della grandezza P per la grandezza Q o per il numero $\alpha_0+\beta_1$ rispettivamente.

In particolare è x_0+y_1 il quoziente dei due numeri p_0+q_1 e $\alpha_0+\beta_1$, onde potremo scrivere, se $\alpha \lesseqgtr 0$,

$$\frac{p_0+q_1}{\alpha_0+\beta_1}=\left(\frac{p}{\alpha}\right)_0+\left(\frac{\alpha q-\beta p}{\alpha^2}\right)_1.$$

144. Se ora veniamo al problema che ci occupava in principio, quello cioè di vedere se e come data una grandezza qualunque le corrispondesse rispetto ad un'altra pure qualunque un numero come misura, supponiamo che M sia la grandezza che si prende per unità di misura, e C quella da misurarsi, e che si abbia $C=A_{c_0+d_1}$ e $M=A_{m_0+n_1}$. Per quanto si è visto, basterà cercare il numero per cui si deve moltiplicare M per avere C, cioè cercare il quoziente della divisione di C per M. Supponiamo M della classe I, essendo allora $m \lesseqgtr 0$; il numero cercato esisterà e ve ne sarà uno solo, e sarà dato (§ 143) da

$$x_0+y_1=\frac{c_0+d_1}{m_0+n_1}=\left(\frac{c}{m}\right)_0+\left(\frac{md-cn}{m^2}\right)_1.$$

Per giungere a questa formula abbiamo dovuto togliere l'arbitrarietà nella moltiplicazione per numeri irrazionali.

Se la sottoclasse delle grandezze primarie (la quale è in parte arbitraria) si dice *classe caratteristica della misura nella classe data,* possiamo finalmente concludere:

" Data una classe di 2ª specie continua decomposta nelle due sotto-
" classi I e II, se presa una grandezza A di I come unità si fissa rispetto
" ad essa la classe caratteristica, ad ogni grandezza della classe completa
" corrisponde un numero del 2° grado $\alpha_0+\beta_1$, e viceversa. Alle grandezze
" primarie corrispondono i numeri $(\alpha_0, 0)=\alpha_0$, a quelle di II i numeri
" $(0, \beta_1)=\beta_1$, alla grandezza modulo il numero $(0, 0)=0$.

" Cambiando unità e classe caratteristica, cambia la misura di una
" data grandezza. Ma se cambiando unità e prendendone un'altra M, con
" $M=A_{m_0+n_1}$ $(m \lesseqgtr 0)$, si determinano le grandezze della nuova classe ca-

" ratteristica in modo che sia

$$\mathrm{M}_\alpha = \mathrm{A}_{(m\alpha)_0 + (n\alpha)_1},$$

" allora la misura $c_0 + d_1$ di una grandezza C rispetto all'antica unità è " legata a quella $c'_0 + d'_1$ rispetto alla nuova unità M, dalla relazione

$$c_0' + d_1' = \frac{c_0 + d_1}{m_0 + n_1}\ . \text{"}$$

Fissata dapprima la classe caratteristica, supporremo che, cambiando unità, si cambi nel modo ora detto anche la classe caratteristica.

Se nel cambiare l' unità A si prende in particolare per nuova unità una delle grandezza primarie A_{m_0}, la nuova classe caratteristica coincide colla primitiva: di più la nuova misura di una grandezza $\mathrm{C} = \mathrm{A}_{c_0 + d_1}$ essendo data da $\frac{c_0 + d_1}{m_0}$, ed avendosi, per le formule generali trovate, che

$$\frac{x_0 + y_1}{r_0 + s_1} = \left(\frac{x}{r}\right)_0 + \left(\frac{ry - xs}{r^2}\right)_1,$$

potremo dedurre che la nuova misura sarà

$$\frac{c_0 + d_1}{m_0} = \left(\frac{c}{m}\right)_0 + \left(\frac{d}{m}\right)_1 .$$

In queste considerazioni, siccome il numero β_1 indica passaggio da un unità di I ad una di II, il che equivale ad una moltiplicazione per (1_1), e indi moltiplicazione per il numero β, bisogna stabilire sempre il significato di 1_1, cioè riconoscere in quale grandezza di II esso trasforma l'unità di I.

145. Se prendiamo per unità una grandezza A, ogni grandezza M della classe completa data può esprimersi sotto la forma $\mathrm{A}_{m_0 + n_1}$, cioè $\mathrm{S}(\mathrm{A}_{m_0}, \mathrm{A}_{n_1})$; e se A_1, che è una grandezza di II, s'indica di nuovo con E, sarà $\mathrm{M} = \mathrm{S}(\mathrm{A}_{m_0}, \mathrm{E}_{n_1}) = \mathrm{S}(m\,\mathrm{A},\ n\,\mathrm{E})$.

La nostra classe può quindi considerarsi come una classe complessa a due dimensioni, quando si rinunzi a considerare le grandezze di II come tutte minori di quelle di I; saranno allora sue sottoclassi elementari la classe caratteristica della misura costruita rispetto ad A e la classe II. La classe è ad unità non indipendenti ed a sistema chiuso. Ma, secondo quello che è stato detto (§ 130), il prodotto non deve godere la proprietà di essere uguale al modulo soltanto quando lo è uno dei suoi fattori, perchè si notò che questa

proprietà appartiene solo alle classi i cui numeri 1 ed i delle due unità godono le proprietà

$$1.1 = 1\ ; \qquad 1.i = i.1 = i; \qquad i.i = -1.$$

E infatti si vede subito (§142, (4)) che il prodotto dei due numeri del 2° grado $(0\,,\, m_1)$, $(0\,,\, n_1)$ è zero, senza che necessariamente debbano essere zero m_1 o n_1. I numeri delle unità nostre godono le proprietà:

$$1_0 .\, 1_0 = 1_0\ ; \qquad 1_0 .\, 1_1 = 1_1 .\, 1_0 = 1_1\ ; \qquad 1_0 .\, 1_0 = 0.$$

In queste classi di grandezze il prodotto non può *in generale* godere la proprietà di cambiare necessariamente quando cambia uno solo dei fattori: e infatti se, per es., si ha che

$$\alpha_0 .\, \beta_1 = \gamma_1, \qquad \text{si ha pure } (\alpha_0 + \delta_1)\,\beta_1 = \gamma_1\ ,$$

giacchè

$$(\alpha_0 + \delta_1)\,\beta_1 = (\alpha\beta)_1 + 0.$$

Si vede peraltro facilmente che il prodotto cambia sempre, se in un fattore solo si cambia la parte α_0.

146. Si mostrò già come, essendo A ed E due grandezze arbitrarie rispettivamente di I e di II, qualunque grandezza B della classe completa fosse sempre uguale a $S(A_\alpha, E_\beta)$ e quindi ad ogni grandezza corrispondesse una coppia di numeri reali (α,β). Poi, volendo ridurre tutto ad un'unità, si convenne di indicare con un numero 1_1 il passaggio da A ad E, talchè ad ogni grandezza venne a corrispondere un numero di 2° grado $\alpha_0 + \beta_1$ che ne indicava la misura rispetto ad un'unità qualunque A presa fra le grandezze di I.

Se vogliamo invece prendere per unità di misura una grandezza di II, è evidente che abbiamo i numeri α_0 (od α) per indicare le misure di tutte le altre grandezze di II, ma ci mancano numeri per indicare quelle delle grandezze di I. Senza stare a ripetere considerazioni che risulterebbero analoghe alle precedenti, diremo che si introduce il numero 1_{-1} per indicare il passaggio da E ad A; allora sarà $E1_0 = E$, $E1_{-1} = A$, e in generale $E\alpha_{-1}$ indicherà la grandezza A_α. Poichè quindi ogni grandezza B è tale che $B = S(A_{\alpha_0}, A_{\beta_1})$, avremo anche che $B = S(E_{\alpha_{-1}}, E_{\beta_0})$, e indicheremo B con $E_{(\alpha_{-1},\,\beta_0)}$. Alle varie grandezze B verremo così a far corrispondere dei numeri (α_{-1}, β_0) che diremo pure numeri di 2° grado, e di cui l'ugua-

glianza, la somma ecc. si definiranno secondo i concetti generali, talchè basterà ripetere considerazioni e dare definizioni analoghe a quelle del § 141. Il numero (α_{-1}, β_0) potrà quindi indicarsi con $\alpha_{-1}+\beta_0$. Alle grandezze di II corrispondono i numeri $(0, \beta_0) = \beta_0$, a quelle primarie di I i numeri $(\alpha_{-1}, 0) = \alpha_{-1}$. I numeri α_{-1} sono maggiori di qualunque numero ordinario α_0. Ricordando che ω è il numero della grandezza infinita, si vedrebbe che per il prodotto i nuovi numeri seguono la legge indicata dalla formula

$$(\alpha_{-1}+\beta_0)(m_{-1}+n_0)=\omega+(\alpha n+\beta m)_{-1}+(\beta n)_0,$$

dove ω manca, se $\alpha=0$, o $m=0$. Osservando poi che

$$\alpha_0 \, \mathrm{E} = \mathrm{A}_{\alpha_1} \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{\alpha}\right)_{-1} (\alpha_0 \, \mathrm{E}) = \mathrm{A},$$

ne viene che

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)_{-1} \mathrm{A}_{\alpha_1} = \mathrm{A},$$

talchè

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)_{-1} \alpha_1 = 1_0;$$

onde i nuovi numeri sono gli inversi dei numeri α_1.

I concetti di misura nelle nostre classi speciali danno quindi origine ai numeri $\alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1$. I numeri α_{-1} sono la misura delle grandezze primarie di I rispetto ad una grandezza di II; i numeri $\alpha_{-1}+\alpha_0$ sono le misure di grandezze qualunque di I rispetto a grandezze di II; i numeri α_0 sono la misura di grandezze di II con grandezze di II, o di grandezze primarie di I con altre grandezze pure primarie di I; i numeri α_1 sono la misura di grandezze di II rispetto a grandezze di I; i numeri $\alpha_0+\alpha_1$ sono le misure di grandezze qualunque di I rispetto a grandezze pure qualunque di I.

Il problema della misura per le classi di 2ª specie decomponibili solo in due sottoclassi principali è così risoluto mediante nuovi numeri, che comprendono gli ordinari numeri reali e numeri maggiori o minori di tutti questi.

Caso generale delle classi decomponibili in un numero qualunque di sottoclassi principali. — 147. S'intende ora come risultati simili ai precedenti si debbano ottenere per le classi decomponibili in più di due sottoclassi principali.

Sia dapprima una classe decomponibile in 3 sottoclassi principali, che indicheremo con I, II, III, o tale che, se anche si decompone in un maggior numero di classi, si consideri come isolato il gruppo di 3 consecutive di esse, cioè si considerino uguali al modulo le grandezze inferiori a tutte le grandezze di III, e uguali alla grandezza infinita quelle superiori alle grandezze di I. Allora se A', A'', A''' sono tre grandezze arbitrarie prese come unità nelle classi rispettive I, II, III, ogni numero reale α individua in ciascuna di esse, se si considerano isolate, una grandezza; ma, se si ritengono non isolate, individua in I rispetto ad A' un gruppo di grandezze corrispondenti ad una ad una a tutte le grandezze di II e di III, considerando queste due classi come classi a due sensi, ed individua in II rispetto ad A'' un gruppo di grandezze corrispondenti ad una ad una a tutte quelle della classe III considerata a due sensi. In III, invece, ad ogni numero reale corrisponde rispetto ad A''' una grandezza ed una sola.

Allora, colle norme seguite per il caso precedente, nel gruppo di α A', cioè nel gruppo che rispetto a quello di A' corrisponde al numero reale α, sceglieremo una grandezza da far corrispondere ad α e la indicheremo con A'_α, e nel gruppo di β A'' una grandezza da far corrispondere a β e la diremo A''_β. In questo modo si vedrà facilmente che ogni grandezza B della classe si trova uguale ad $S(A'_\alpha, A''_\beta, A'''_\gamma)$, e viceversa ad ogni terna di numeri (α, β, γ) corrisponde rispetto alle 3 unità arbitarie A', A'', A''' una grandezza ed una sola della classe; particolarmente, a $(0, 0, \gamma)$ corrispondono grandezze di III, a $(0, \beta, \gamma)$, con $\beta \lesseqgtr 0$, grandezze di II, a (α, β, γ), con $\alpha \lesseqgtr 0$, grandezze di I, a $(\alpha, 0, 0)$, $(0, \beta, 0)$ rispettivamente grandezze primarie di I e di II. Evidentemente per fissare la misura sono da fissarsi, oltre le 3 unità, anche le grandezze primarie per I e per II, cioè le grandezze che, rispetto alle unità rispettive A' ed A'', devono corrispondere ai numeri effettivi reali α, e che o sono determinate o sono da scegliersi ad arbitrio, secondo le norme fissate, nel gruppo rispettivamente di I e di II che corrisponde al numero reale α rispetto al gruppo di I che contiene A' e a quello di II che contiene A''. Queste grandezze primarie costituiscono due classi di 1ª specie, che diremo rispettivamente *classi caratteristiche di 1° e di 2° grado.* Indicando con 1_1 il passaggio dall'unità di una sottoclasse principale p^a a

quella della sottoclasse immediatamente seguente $(p+1)^a$ e con 1_2 il passaggio a quella della sottoclasse seguente distante di due posti, ne viene che può prendersi A′ come unica unità, e rispetto ad essa ad ogni grandezza corrisponde un numero $(\alpha_0+\beta_1+\gamma_2)$ che diremo *numero di* 3° *grado*. E se $1_{-1}, 1_{-2}$ indicano i passaggi inversi dei precedenti, presa come unica unità una grandezza A″ di II, ogni altra grandezza della classe completa ha per misura un numero $(\alpha_{-1}+\beta_0+\gamma_1)$, mentre rispetto ad A‴ grandezza di III le misure saranno $(\alpha_{-2}+\beta_{-1}+\gamma_0)$. I numeri delle cinque specie

$$\alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$$

sono tali che ogni numero di una specie è maggiore di tutti quelli di qualcuna delle specie seguenti.

La legge di moltiplicazione di questi numeri sarà chiaramente la seguente:

$$(m_{-2}+n_{-1}+p_0+q_1+r_2)(\alpha_{-2}+\beta_{-1}+\gamma_0+\delta_1+\varepsilon_2)=$$
$$=\omega+(m\gamma+n\beta+p\alpha)_{-2}+(m\delta+n\gamma+p\beta+q\alpha)_{-1}+(m\varepsilon+n\delta+p\gamma+q\beta+r\alpha)_0+$$
$$+(n\varepsilon+p\delta+q\gamma+r\beta)_1+(p\varepsilon+q\delta+r\gamma)_2+0,$$

dove ω manca, se è $m=n=0$, o se $\alpha=\beta=0$, o se $m=0$, $\alpha=0$. In particolare

$$r_2\,\varepsilon_2=0, \quad r_2\,\delta_1=0, \quad q_1\,\varepsilon_2=0, \quad m_{-2}\,\alpha_{-2}=\omega, \quad n_{-1}\,\alpha_{-2}=\omega, \quad m_{-2}\,\beta_{-1}=\omega,.$$

ed anche qui la moltiplicazione non obbedisce alle sue leggi caratteristiche ordinarie.

Si può notare che in queste classi si ha

$$(\alpha_0+\beta_1)(m_0+n_1)=(\alpha m)_0+(\beta m+\alpha n)_1+(\beta n)_2,$$

mentre nelle precedenti decomposte in due sole sottoclassi principali era

$$(\alpha_0+\beta_1)(m_0+n_1)=(\alpha m)_0+(\beta m+\alpha n)_1.$$

Si vede facilmente perchè sono differenti i risultati: le grandezze corrispondenti a $(\beta n)_2$ sono della classe III, e nel caso precedente queste grandezze o non esistevano (all'infuori di 0) o si ritenevano uguali alla grandezza modulo, per cui il numero corrispondente doveva essere lo zero.

148. In generale, supponiamo che la classe di 2ª specie si decomponga in n sottoclassi principali, o che altrimenti l'insieme di n sottoclassi principali consecutive si consideri isolato, cioè si ritengano uguali al modulo le grandezze di altre sottoclassi al di là dell'ultima, e ad Ω quelle maggiori della 1ª sottoclasse. Queste classi s'indichino con I, II, III,... R,... N. Scegliamo

in esse n unità arbitrarie A', A'',... $A^{(r)}$,... $A^{(n)}$. In generale, presa nella classe R la $A^{(r)}$ come unità, ogni numero ordinario determina in essa un gruppo di grandezze, le quali corrispondono una ad una a quelle delle sottoclassi seguenti, considerate, se già non lo sono, a due sensi. In ciascun gruppo fisseremo, colle solite norme, una grandezza da farsi corrispondere ad $\alpha A^{(r)}$. Queste grandezze, corrispondenti una ad ogni numero α, si indicheranno con $A_\alpha^{(r)}$, e il loro insieme costituirà una classe di 1ª specie, continua se isolata, che diremo *classe caratteristica del grado* r^{esimo}. Fissate queste classi caratteristiche per ciascuna delle classi I, II,... (N—1), si vede subito che ad ogni grandezza della classe completa corrispondono n numeri $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)},\ldots, \alpha^{(n)}$ reali e quelli soli, e viceversa l'insieme di essi dà la misura della grandezza. La classe data si può quindi considerare come una classe complessa ad n dimensioni, della quale sono sottoclassi elementari la classe N e le $(n-1)$ classi caratteristiche.

Se poi s'indica in generale con $\alpha_r^{(r)}$ o con $\alpha_{-r}^{(r)}$ il passaggio dall'unità di una classe a quella di una che segue o rispettivamente precede di r posti e la successiva moltiplicazione per il numero reale $\alpha^{(r)}$ fatta nella classe ottenuta, e con α_0 la semplice moltiplicazione per α nella classe ov' è la grandezza, si vede che, dando come in generale le definizioni di uguaglianza, di somma ecc, può dirsi che, rispetto ad una grandezza $A^{(1)}$ di I, ad ogni grandezza della classe data corrisponde un numero $\left(\alpha_0^{(0)}+\alpha_1^{(1)}+\alpha_2^{(2)}+\ldots+\alpha_{n-1}^{(n-1)}\right)$: alle grandezze della classe N corrispondono in particolare i numeri $\alpha_{n-1}^{(n-1)}$, cioè i numeri reali $(0, 0,\ldots 0, \alpha^{n-1})$, alle grandezze della classe caratteristica di grado r (*grandezze primarie di grado* r) corrispondono i numeri $\alpha_r^{(r)}$, cioè i numeri reali $(0, 0\ldots\ 0, \alpha^{(r)}, 0,..0)$ ecc. Prendendo invece per unità una grandezza $M^{(r)}$ della classe R, ad ogni grandezza corrisponde un numero della forma $\left(\alpha_{1-r}^{(1-r)}+\alpha_{2-r}^{(2-r)}+\ldots+\alpha_0^{(0)}+\ldots+\alpha_{n-r}^{(n-r)}\right)$: prendendo per unità una grandezza $A^{(n)}$ della classe N, il numero corrispondente ad ogni grandezza è della forma $\left(\alpha_{-n+1}^{(-n+1)}+\alpha_{-n+2}^{(-n+2)}+\ldots+\alpha_{-1}^{(1)}+\alpha_0^{(0)}\right)$.

I numeri di cui ci occupiamo si diranno *numeri di grado* n°.

Le regole della moltiplicazione di due di questi numeri si vede facilmente che sono simili alle precedenti. I numeri si moltiplicano termine a termine, notando che, con r ed s positivi o negativi, si ha

$$\begin{aligned} \alpha^{(r)}_r . \alpha^{(s)}_s &= (\alpha^{(r)} \alpha^{(s)})_{r+s} \quad \text{se} \quad -n<r+s<n, \\ &= 0 \quad \text{se} \quad r+s \geqq n, \\ &= \omega \quad \text{se} \quad r+s \leqq -n, \end{aligned}$$

indicando $\alpha^{(r)}$ ordinari numeri reali; cioè, se il numero 1_r indica il passaggio dall'unità di una classe a quella precedente o seguente di r posti secondochè r è negativo o positivo, sarà:

$$\left(\alpha^{(r)} 1_r\right) \left(\alpha^{(s)} 1_s\right) = \left(\alpha^{(r)} \alpha^{(s)}\right) 1_{r+s},$$

dove $1_{r+s} = 0$, se $r+s \geqq n$, e $= \omega$ se $r+s \leqq -n$. La moltiplicazione fra due numeri della nostra classe messi sotto la forma

$$\alpha^{(r)} 1_r + \alpha^{(r+1)} 1_{r+1} + \dots + \alpha^{(p)} 1_p$$

si fa quindi come se fossero polimoni, nei quali le α fossero coefficienti ed 1_s potenze di 1_1, in cui l'esponente è scritto in basso; avvertendo che, supponendo che n sia il grado dei nostri numeri, sarà $1_{r+s} = 0$, $= \omega$, se rispettivamente $r+s \geqq n$, o $r+s \leqq -n$.

In questo sistema di numeri complessi si vede che un prodotto può essere zero, senza che sia zero nessuno dei suoi fattori.

La misura nelle rimanenti classi di 2ª specie. – 149. In quelle classi di 2ª specie che con un procedimento che non ha termine si decompongono in un numero infinito di sottoclassi principali, si può ottenere la misura delle grandezze di n sottoclassi consecutive mediante i criterii precedenti, considerando il loro insieme come isolato: talchè, prendendo n convenientemente grande, si può avere la misura di una grandezza qualunque della classe rispetto ad un'altra pure qualunque, espressa coi numeri di grado n^0

$$\alpha^{0} 1_0 + \alpha^{(1)} 1_1 + \alpha^{(2)} 1_2 + \dots + \alpha^{(n)} 1_n.$$

Nelle classi di 2ª specie che si decompongono in n sottoclassi principali di 1ª specie ed in una (l'ultima o la prima) assoluta, si possono applicare i concetti precedenti ed ottenere come misura dei numeri di grado n^0, purchè si considerino come uguali alla grandezza modulo, o rispettivamente alla grandezza infinita, tutte le grandezze dell'ultima o della prima classe.

Nelle classi assolute in cui non è possibile nessuna delle decomposizioni precedenti, è chiaro che non si possono applicare i precedenti concetti. Si può solo notare che, come già si è dimostrato (§ 64), presa in esse una grandezza A, questa individua un gruppo (A) di grandezze, tali che una qualunque di esse è minore di convenienti multiple di ciascuna altra grandezza dello stesso gruppo. Il gruppo (A) si potrà dire il *gruppo misurabile* rispetto ad A. Se la classe (a) manca (§ 86), non esistono grandezze minori di quelle di A, e quindi ad ogni grandezza di questa viene a corrispondere rispetto ad A (o anche a qualunque altra grandezza del gruppo) un numero reale, e viceversa. Ma se (a) esiste, la (A) forma da sè sola una classe di 1ª specie, soltanto se si considera isolata: altrimenti, ogni numero individua in (A) non una grandezza ma un gruppo di grandezze, le divergenze delle quali non sono che le grandezze di (a).

Del resto, all'infuori di queste misure speciali rispetto ad una data grandezza nel suo gruppo misurabile, mi sembra che il concetto di misura non sia applicabile *in generale* alle classi di questo genere. Si possono al più da esse staccare delle sottoclassi speciali le quali siano decomponibili in sottoclassi principali, e alle grandezze di queste applicare i concetti di misura già svolti; ma è da notarsi che i risultati non varranno che in quanto quelle grandezze si considerano in quelle sottoclassi speciali.

150. Fa appunto questo il Thomae (¹) quando considera la classe degli infinitesimi di tutte le funzioni, e mostra che quelli delle funzioni $\frac{1}{\log x}$, $\frac{1}{\log\log x}$ ecc. non sono esprimibili cogli ordinari numeri, ed occorrono nuovi numeri minori di tutti quelli esistenti (cioè dei numeri reali); e indicando con $\lg^n$ l'ordine d' infinitesimo che corrisponde a $\frac{1}{\log\log\ldots\log x}$, introduce i numeri

$$\alpha+\beta\lg+\gamma\lg^2+\ldots.+\mu\lg^m.$$

La classe completa degli ordini d'infinitesimo è assoluta, come si è mostrato in addietro: l' introdurre quei numeri equivale ad avere scelto nella

(¹) Thomae. Abriss einer Theorie der complexen Functionen (Halle 1870). — Sur les limites de la convergence ecc. (Annali di Matematica, Serie 2 T. V.)

classe totale una sottoclasse decomponibile in s ottoclassi principali, che sono quelle degli ordini d'infinitesimo di $\left(\frac{1}{\log^m x}\right)^{n_m}$, di $\left(\frac{1}{\log^{m-1} x}\right)^{n_{m-1}} \left(\frac{1}{\log^{m-1} x}\right)^{n_m}$, con $n \underset{m-1}{>} 0$, ecc, di $x^n \left(\frac{1}{\log x}\right)^{n_1} \ldots\ldots \left(\frac{1}{\log^m x}\right)^{n_m}$, con $n > 0$. Ma così restano fuori gli infinitesimi di infinite funzioni, il cui ordine d'infinitesimo non è uguale a nessuno di quelli di funzioni della forma

$$x^n \left(\frac{1}{\log x}\right)^{n_1} \left(\frac{1}{\log^2 x}\right)^{n_2} \ldots\ldots \left(\frac{1}{\log^m x}\right)^{n_m}.$$

Quei numeri non risolvono quindi il problema della misura che in una sottoclasse della classe totale degli infinitesimi. Le classi caratteristiche, che, come si è notato, devono essere sempre fissate per applicare i concetti di misura, sono tacitamente stabilite dal Thomae; nella classe I egli prende per grandezze primarie gli ordini di x^n; nella II quelli di $\left(\frac{1}{\log x}\right)^{n_1}$; nella III quelli di $\left(\frac{1}{\log^2 x}\right)^{n_2}$, ecc.

Ci piace ricordare qui di passaggio anche i numeri ultra-infiniti introdotti da Cantor [1]. Essi per altro non potrebbero servire ad applicare il concetto di misura che in classi di 2ª specie decomponibili in sottoclassi improprie. Ci limitiamo quindi ad accennarli, avendo detto di escludere dal nostro studio tali classi.

---

(1) CANTOR. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Math: Ann: Bd XXI).

APPENDICE

TEORIA ANALITICA DEL NUMERO

Teoria analitica del numero.

Diverse teorie del numero. — 1. Crediamo utile esporre brevemente come si possano introdurre i numeri in modo puramente analitico, senza riferirsi ad altre grandezze. Nel metodo seguito precedentemente, i numeri sono stati introdotti come enti relativi a grandezze di classi *già costituite*: e quindi, date per esse certe definizioni di uguaglianza, di somma ecc. subordinate a quelle già date per le grandezze, sono risultate *dimostrate* per essi tutte le proprietà caratteristiche di questi concetti, e le proprietà identiche a quelle che competono alle grandezze delle classi. Le arbitrarie definizioni di uguaglianza, di disuguaglianza, di somma ecc. e l' arbitraria corrispondenza metrica stabilite fra i numeri e le classi, conducono quindi a riconoscere come semplice conseguenza che le varie specie di numeri formano altrettante classi.

Col metodo che ora esporremo (¹) si tratta di *scegliere* fino da principio definizioni tali da rendere l'insieme dei numeri una classe, e quindi le definizioni devono esser subordinate allo scopo di raggiungere quelle date proprietà: talchè queste proprietà saranno, se non in tutto almeno in parte, punti di partenza, invece che risultati di dimostrazioni, e talora anzi costituiranno da sè definizioni d' operazioni.

I numeri interi positivi. — 2. Sia un ente da dirsi *numero* e da indicarsi col segno 1: scrivendo $1+1$ intendiamo di eseguire sopra il numero

(¹) Cfr. Hankel, Stolz, Dini, Frattini, Peano ecc. ecc. Alcuni passaggi e dettagli saranno qui trascurati, essendo nostro scopo di dare solo un cenno del metodo, per il completo sviluppo del quale rimandiamo agli autori ora citati.

1 ed un altro ente (numero), che diremo ancora 1 e *definiremo uguale* al precedente, un'operazione cui si attribuisce un significato non effettivo ma puramente formale. Per darle un risultato, diremo che questo è un nuovo ente, un *numero*, che *definiremo diverso* da 1 e che indicheremo con 2, scrivendo $1+1=2$. In modo analogo definiremo $2+1=3$, $3+1=4$ ecc., dicendo per definizione che i numeri 1, 2, 3, 4 ecc. sono *disuguali* fra loro. L'operazione formale, definita per ora unicamente fra questi enti, che si diranno numeri *interi* o *naturali*, e il numero 1, la diremo *addizione*, e il risultato si dirà *somma*.

Dobbiamo definire un'addizione anche fra questi numeri in modo che essi formino una classe, cioè che il resultato " somma „ sia un numero intero. Di più *vogliamo* che quest'operazione goda la proprietà di essere associativa, commutativa, ad un sol valore e dipendente. Prenderemo come definizione una delle proprietà, quella di essere essa associativa, non occorre nella sua generalità, ma sotto una sua forma particolare. Diremo cioè *addizione* fra due numeri un' operazione che colleghi ad essi un terzo numero da dirsi *somma*, in modo che si abbia

$$(1) \qquad a+(b+1)=(a+b)+1.$$

La somma è definita da questa relazione ed è ad un sol valore e dipendente, giacchè (ricordando che l'addizione $b+1$ è definita, e $1+1=2$, $2+1=3$ ecc.) dovrà essere, per $b=1$,

$$a+(1+1)=(a+1)+1\,, \quad \text{cioè } a+2=(a+1)+1\,;$$

per $b=2$ sarà

$$a+(2+1)=(a+2)+1, \quad \text{cioè } a+3=(a+2)+1:$$

ma $a+2$ è definito da $(a+1)+1$, e le addizioni con 1 danno risultati noti, quindi è conosciuto $a+3$; e così via.

L'addizione è in generale associativa: giacchè, supponendo di sapere già che

$$(2) \qquad a+(b+c)=(a+b)+c\,,$$

siccome sarà, per le (1) e (2),

$$a+\Big(b+(c+1)\Big)=a+\Big((b+c)+1\Big)=\Big(a+(b+c)\Big)+1=\Big((a+b)+c\Big)+1=$$
$$=(a+b)+(c+1),$$

così avremo

$$a + \Big(b + (c+1)\Big) = (a+b) + (c+1) ;$$

ossia, se vale la (2), essa vale anche se in luogo di c si pone $(c+1)$. Ma la (2) vale per $c = 1$, a causa della (1), quindi vale in generale.

La nostra addizione è pure in generale commutativa. Infatti, supposto che si sappia già che

(3) $$a + 1 = 1 + a ,$$

sarà per le (1) e (2)

$$1+(a+1) = (1+a) + 1 = (a+1) + 1 ;$$

cioè, se la (3) è vera per a, sarà vera per $(a+1)$. Ma la (3) è vera per $a=1$, quindi è vera in generale. Di più, se si sa già che

(4) $$a+b = b+a,$$

sarà, applicando successivamente la (1), (4), (1), (3), (2),

$$a + (b+1) = (a+b) + 1 = (b+a) + 1 = b + (a+1)=b+(1+a) = (b+1)+ a ,$$

cioè, se la (4) è vera per b, è vera per $b+1$; ma a causa della (3) è vera per $b=1$, quindi è vera in generale.

Introdotto un nuovo numero 0 colla definizione

(5) $$a+0 = 0+a = a$$

con a qualunque, si vede che l'addizione dei numeri interi gode le proprietà caratteristiche dell' operazione S delle classi, e quindi i numeri interi formano una classe di grandezze il cui modulo è zero.

Se i numeri interi li supponiamo scritti di seguito uno all' altro nell' ordine in cui si sono generati per la loro definizione,

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots\ a,\ a+1, \ldots\ldots$$

diremo che uno qualunque di essi è *maggiore* di tutti i precedenti e *minore* di tutti i seguenti. Si vede subito che con questa definizione sono soddisfatte le condizioni caratteristiche imposte in generale (§ 20) ai concetti di maggiore e di minore. La classe dei numeri interi è quindi ad una dimensione e ad un senso (§§ 21, 28).

3. Si definisce ora una moltiplicazione fra i numeri interi coll'esigere che essa sodisfi alle condizioni caratteristiche riscontrate per essa nelle classi di grandezze, e vi vede che, come per l' addizione, basta esigerne alcune soltanto, acciocchè le altre vengano di conseguenza.

Si dirà quindi *moltiplicazione* fra due numeri interi (*fattori*) un' operazione tale che, indicandola collo scrivere di seguito i fattori o col separare questi per mezzo dei segni . o $\times$, sia

(6) $$a.\, 1 = a$$

(7) $$a\,(b+1) = a\,b + a\,.$$

La moltiplicazione dà sempre così un resultato ed uno solo, e dà risultati differenti se cambia uno solo dei suoi fattori. Infatti, per le (7) e (6),

$$a.\,(1+1) = a\,.\; 1+a = a+a\;,\quad \text{cioè } a\,.\; 2 = a+a\,,$$
$$a.\,(2+1) = a\,.\; 2+a\,,\quad \text{cioè } a\,.\; 3 = a.2+a\,,$$
$$a.\,(2+1) = a\,.\; 3+a\,,\quad \text{cioè } a\,.\; 4 = a.3+a\,, \text{ ecc.},$$

talchè i risultati delle operazioni $a\,.\,b$ si calcolano mediante successive addizioni, e sono quindi possibili e ad un sol valore. Chiaramente poi sono tutti disuguali.

La moltiplicazione, rispetto all'addizione, è distributiva; giacchè, supposto che si sappia già che

(8) $$a\,(b+c) = ab + a\,c,$$

sarà per le (1), (7), (8), (7)

$$a\Big(b + (c+1)\Big) = a\Big((b+c) + 1\Big) = a\,(b+c) + a = ab + ac + a = ab + a\,(c+1),$$

talchè, se la (8) è vera per c, è vera per $c+1$. Ma, a causa della (7), essa vale per $c=1$, quindi vale in generale. Così, se già si sa che

(9) $$(a+b)\,c = ac + bc\,,$$

sarà per le (8), (9), (4), (8)

$$(a+b)(c+1)=(a+b)c+(a+b)=ac+bc+a+b=ac+a+bc+b=a(c+1)+b(c+1),$$

e quindi se la (9) è vera per c è vera per $(c+1)$. Ma essa vale evidentemente per $c=1$, quindi vale in generale. La proprietà distributiva della nostra moltiplicazione è cosi completamente dimostrata.

La moltiplicazione è associativa. Infatti, se si sa che

(10) $$a\;(bc) \;=\; (ab)\;c\,,$$

sarà per le (7), (8), (10), (7),

$$a\Big(b\,(c+1)\Big) = a\,\Big(bc+b\Big) = a\,(bc) + ab = (ab)\,c + (ab).\,1 = ab\,(c+1)\;;$$

quindi la (10) è vera in generale, essendo vera per $c=1$.

Si ha anche in generale

(11) $$1 \cdot a = a\,,$$

giacchè tal formula è vera per $a = 1$, ed essendo vera per a lo è per $(a+1)$: poichè per le (7), (11), (9) si ha

$$1.(a+1) = 1.\,a + 1 = a.\,1 + 1.\,1 = (a+1).\,1.$$

Allora può dimostrarsi che la moltiplicazione è commutativa. Infatti, supposto di sapere già che

(12) $$a\,b = b\,a\,,$$

sarà, per le (8), (12), (11), (9),

$$a\,(b+1) = ab + a = ba + 1a = (b+1)\,a,$$

e quindi la (11), essendo vera per $b = 1$, è vera in generale.

Definiremo poi

(13) $$a\,.\;0 = 0\,.\;a = 0\,,$$

con che le proprietà enunciate per la moltiplicazione valgono anche se qualcuno dei fattori è lo zero.

I numeri interi formano evidentemente una classe anche rispetto alla moltiplicazione presa come operazione S; il modulo è allora 1.

I numeri interi negativi. — 4. Passiamo allo studio delle operazioni inverse delle due già definite, che diremo rispettivamente *sottrazione* e *divisione*, e vediamo se esse sono sempre possibili o no.

Quanto alla sottrazione, se si cerca un numero tale che sia

$$a + x = b\,,$$

nel qual caso scriveremo

$$x = b - a\,,$$

evidentemente il numero x esiste fra i numeri nostri interi se $b \geqq a$, e se $b < a$ non esiste. Introduciamo nuovi numeri, che diremo *negativi*, per rendere possibili anche queste sottrazioni, in modo che essi insieme ai numeri interi formino una classe.

Colla definizione data i numeri introdotti fin qui, e che chiameremo *positivi*, sono tutti > 0. Colleghiamo a ciascuno di essi a un altro ente da dirsi ancora *numero* (negativo) a', colla definizione

(14) $$a + a' = 0\,, \qquad \text{con che} \qquad a' = 0 - a.$$

Esso sarà, secondo la parola usata per le grandezze, il numero *opposto* ad a. Qualunque numero che si trovi potersi sostituire ad a nella (14) si dirà *uguale* ad a', gli altri numeri si diranno *disuguali* ad a'.

La (14) definisce la somma di un numero positivo col suo opposto negativo. Noi definiremo in generale *addizione* per questi numeri un' operazione che goda le proprietà caratteristiche delle operazioni di tal nome, e quindi che sia commutativa, associativa, ad un sol valore e dipendente, e che godrà perciò tutte le altre proprietà dipendenti da queste (§§ 7, 12) e dai concetti di maggiore e di minore (§§ 21, 25). Dovrà allora essere

(15) $$a'+a = a+a' = 0:$$

e perciò, come a' è il numero opposto ad a, così a è il numero opposto ad a'. Dovendo poi essere (§ 20, 5°) insieme con $a > b$ anche $a+c>b+c$, se a è un numero positivo e quindi > 0, dovrà essere $a+a'>0+a'$, cioè, se deve valere la (15) e a causa delle (14), sarà $0>a'$: e quindi i numeri negativi *devono dirsi minori di* 0, e perciò (§ 25, 2°) minori anche di qualunque numero positivo. Di più, poichè (§ 25, 9°) da $a+b=c$, $d+e=c$, se $a \lesseqgtr d$ si deve dedurre rispettivamente $b \gtreqless e$, siccome è $a+a'=0$, $b+b'=0$, così se $a \gtrless b$ dovrà essere insieme $a' \lessgtr b'$; cioè i nuovi numeri sono da dirsi uno *maggiore* dell'altro, quando l' opposto del primo è *minore* dell' opposto del secondo.

Si ha ora per definizione

$$(a+a') + (b+b') = 0:$$

e quindi, volendosi che anche la somma dei numeri negativi sia commutativa ed associativa, dovrà essere

$$0 = (a+a') + (b+b') = (a+b) + (a'+b'),$$

dove $(a'+b')$ rappresenta il risultato, non ancora definito, dell' addizione di a' e b'. Ma siccome per definizione si ha

$$(a+b) + (a+b)' = 0,$$

essendo $(a+b)'$ il numero negativo opposto ad $(a+b)$, dovrà essere (§ 25, 9°)

(16) $$a'+b' = (a+b)',$$

e così è definita la somma di due numeri negativi: e, volendo che l'addizione sia associativa, risulta subito definita la somma di un numero qualunque di essi. Si vede intanto che i numeri negativi, insieme allo 0, formano una classe rispetto all' operazione addizione. Ricordiamo ora doversi avere in generale che (§§ 7, 1° e 12, 5°, 9°)

$$\text{se} \quad a = b \quad , \qquad \text{si ha } a + c = b + c ;$$
$$a - (b-c) = (a+c) - b ;$$
$$(a+b) + (c-d) = (a+c) + (b-d) ,$$

e si considerino due numeri a e b', uno positivo e l' altro negativo. Indicando con b l' opposto di b', essendo cioè $b+b'=0$, se $a=b$ dovrà essere

(17) $$a+b'=b+b' = 0.$$

Se invece $a>b$, sarà $a-b=c$ numero positivo: e poichè $b=0-b'$, sarà

$$c = a - (0-b') = (a+b') - 0 = a+b ;$$

dovrà quindi essere

(18) $$a+b' = b'+a = a-b.$$

Se invece $a<b$, si osservi che si ha $b+b' = 0$, $a-a = 0$, e quindi $(b+b') + +(a-a) = 0$: e perciò $(b-a) + (b'+a) = 0$. Ma $(b-a) + (b-a)' = 0$, quindi dev' essere (§ 21, 9°)

(19) $$b'+a = a+b' = (b-a)'.$$

Abbiamo così definita la somma di numeri qualunque, positivi e negativi, dando questo nome di somma ad enti che sono della categoria che si studia.

Esiste sempre anche la differenza fra due qualunque dei nostri numeri; giacchè se a e b sono due numeri qualunque positivi o negativi, e b' è l' opposto di b, sarà $b+(a+b') = (b+b') + a = a$, e quindi

$$a - b = a+b'.$$

Le definizioni date per la somma dei numeri negativi ci sono apparse in questo modo *necessarie* per far sì che l'addizione goda per i nuovi numeri le proprietà di cui gode per i numeri positivi, e quindi sia l'operazione S di una classe. Ma non può assicurarsi a priori che queste definizioni siano *sufficienti* perchè siano verificate queste proprietà. Si vede peraltro subito che effettivamente l' addizione, definita come ora abbiamo fatto, gode quelle proprietà caratteristiche dell'addizione, dalle quali discendono tutte le altre. Essa è infatti chiaramente ad un sol valore e dipendente. È commutativa; giacchè per definizione s' è posto $a+b' = b'+a$, e si ha $a' + b' = = (a+b)' = (b+a)' = b'+a'$. Essa è associativa; infatti, per es.,

$$a + (b'+c) = a + (c-b) = (a-b) + c = (a+b') + c ;$$
$$a' + (b+c) = (b+c) - a = (b-a) + c = (a'+b) + c ;$$
$$a + (b'+c') = a + (b+c)' = a - (b+c) = (a-b) - c = (a+b') + c' ; \text{ ecc.}$$

L'addizione nostra gode le proprietà richieste per essere l' operazione S di una classe; quindi l' insieme dei numeri positivi e dei negativi è una classe ad una dimensione e a due sensi.

Il numero negativo a', osservando che $a+a'=0$, e quindi $a'=0-a$, si suole indicare più spesso con $-a$. Più generalmente con $-a$, comunque sia a, s' indica l'opposto di a.

5. Quanto alla moltiplicazione di questi numeri, per definirla esigeremo al solito che goda le ordinarie proprietà. Per questo si chiederà che sodisfi alle proprietà che ora enunceremo, le quali sono casi particolari della proprietà generale distributiva: e ci basteranno quelle, perchè proveremo che da esse discendono tutte le altre caratteristiche. Diremo quindi *moltiplicazione* un'operazione che gode le seguenti proprietà:

(20) $$(0-a)\,b = 0.\,b - a.\,b\,,$$

(21) $$b\,(0-a) = b.\,0 - b.\,a\,,$$

(22) $$(0-a)\,(0-b) = 0.\,0 - a.\,0 - 0.\,b + a.\,b\,,$$

dove a e b indicano numeri positivi o lo zero: esse possono più semplicemente scriversi (giacchè con m positivo si ha $0.\,m = m.\,0 = 0$)

(23) $$(-a)\,b = -ab;\ b\,(-a) = -b\,a;\ (-a)\,(-b) = ab.$$

Dalla (23) intanto, posto $a=0$ o $b=0$, si deduce

(24) $$0\,(-a) = 0$$ (25) $$(-a)\,0 = 0,$$

e si deduce anche la commutatività del prodotto, essendo

$$a\,(-b) = -ab = -ba = (-b)\,a,$$
$$(-a)\,(-b) = ab = ba = (-b)\,(-a).$$

Il prodotto è anche distributivo. Dico cioè (seguitando ad indicare sempre senza nessun segno i numeri positivi e col segno $-$ i numeri negativi) che

(26) $$\Big(a+(-b)\Big)c = ac+(-b)c,\quad \Big((-a)+(-b)\Big)c = (-a)\,c+(-b)c.$$

Quando queste formule siano dimostrate, da esse, per la commutatività già provata del prodotto, seguirà l' altra parte della proprietà distributiva

$$c\,(a_1+b_1) = ca_1 + cb_1,$$

dove a_1 e b_1 sono numeri qualunque positivi o negativi. E seguirà anche che

$$(-c)\,(a_1+b_1) = (a_1+b_1)\,(-c) = (-c)a_1+(-c)\,b_1,$$

giacchè per le (23)

$$(-c)(a_1+b_1)=-\left(c(a_1+b_1)\right)=-(ca_1+cb_1)=(-ca_1)+(-cb_1)=(-c)a_1+(-c)b_1,$$

ed allora la proprietà distributiva sarà provata in tutta la sua generalità. Dimostriamo quindi le (26). Nella prima di esse distinguiamo i tre casi $a=b$, $a>b$, $a<b$. Se $a=b$, essa è evidente. Se $a>b$, sarà $a=n+b$ con n numero positivo, e quindi, per le (9),

$$ac=(n+b)\,c=nc+bc, \qquad \text{da cui } nc=ac-bc\,,$$

cioè, essendo $n=a-b$ e per la (23),

$$(a-b)\,c=ac-bc, \qquad \text{donde } \left(a+(-b)\right)c=ac+(-b)\,c\,, \quad \text{c. d. d.}$$

Se $a<b$ e $b-a=n$, con n positivo, sarà $a-b=-n$, e quindi, tenendo conto anche della (23),

$$\left(a+(-b)\right)c=(a-b)\,c=(-n)\,c=-nc=-(b-a)\;c,$$

cioè, per quanto ora si è mostrato, essendo $b>a$,

$$\left(a+(-b)\right)c=-(bc-ac)=ac-bc=ac+(-b)\,c.$$

Quanto alla seconda delle (26), si osservi che per la (16) si ha

$$(-a)+(-b)=-(a+b),$$

e quindi applicando anche le (23), (9)

$$\left((-a)+(-b)\right)c=\left(-(a+b)\right)c=-(a+b)\,c=-(ac+bc)=-ac-bc=$$
$$(-a)\,c+(-b)\,c\,, \qquad \text{c. d. d.}$$

La proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione è quindi pienamente dimostrata.

La proprietà associativa del prodotto si dimostra subito, giacchè

(27) $a\left(b\,(-c)\right)=a(-bc)=-a(bc)=-(ab)c=(ab)(-c)$ ecc. ecc.,

dimostrandosi gli altri casi in modo consimile. Anche per i numeri negativi si ha che il loro prodotto per 1 è il numero stesso, giacchè

$$(-a).\ 1=1.\ (-a)=-\ a.$$

Nella classe dei numeri interi positivi e negativi le operazioni di addizione sottrazione e moltiplicazione sono tutte possibili.

I numeri frazionarii. — 6. Passiamo ora all' operazione inversa della moltiplicazione, che diremo *divisione*, studiandola nella classe completa dei numeri col segno (positivi o negativi).

La soluzione dell' equazione

$$x.\, b = a,$$

(dove con a e b indichiamo ora senz'altro numeri di qualunque segno, compreso lo zero per a) non si può evidentemente sempre avere fra i numeri fin qui introdotti: essa è solo possibile quando a sia uno di quei numeri che si dicono multipli di b. Se a non è multiplo di b, introdurremo nuovi enti, che diremo *numeri frazionarii*, che servano a risolvere quell' operazione: e li indicheremo con $\frac{a}{b}$. Diremo a *numeratore* e b *denominatore*.

Le operazioni su questi numeri le definiremo nel solito modo. Per la moltiplicazione chiederemo che sia commutativa, associativa, dipendente e ad un sol valore. Allora sarà intanto

$$x.\, b = b.\, x = a,$$

e quindi, siccome $x = \frac{a}{b}$, sarà

$$\frac{a}{b}.\, b = b. \frac{a}{b} = a.$$

Di più, se $x_1 = \frac{a}{b}$, $y_1 = \frac{c}{d}$, ossia $x_1\, b = a$, $y_1\, d = c$, dev'essere $(x_1\, b).\, (y_1\, d) = ac$; e quindi per la commutatività ed associatività richieste nella moltiplicazione, deve aversi

$$(x_1\, y_1)\,.\,(b\, d) = ac, \qquad \text{talchè } x_1 y_1 = \frac{a\, c}{b\, d},$$

e risulta così per definizione necessaria dal prodotto di due numeri frazionari (uno od anche due dei quali possono essere interi se $b=1$ o $d=1$) che deve essere

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\, c}{b\, d}. \tag{28}$$

Viceversa si vede che, così definito, il prodotto è commutativo, associativo e ad un sol valore.

7. Se teniamo conto della (28), sarà

$$\frac{a}{b}.\, 1 = 1. \frac{a}{b} = \frac{a}{b}. \frac{1}{1} = \frac{a.\, 1}{b.\, 1} = \frac{a}{b};$$

e se si vuole che la moltiplicazione sia ad un sol valore, e quindi, poichè $\frac{m}{m} = 1$, sia $\frac{a}{b}.\ 1 = \frac{a}{b}. \frac{m}{m}$, si avrà per la (28)

$$(29) \qquad \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{m} = \frac{am}{bm},$$

e quindi i numeri frazionari sono da dirsi uguali nel caso in cui i termini dell' uno sono equimultipli od equisummultipli dei termini dell' altro.

Data una frazione se, quando è possibile, ne divideremo ambo i termini per un medesimo numero intero, il risultato sarà quindi uguale alla frazione data. Se questa divisione non è possibile, diremo la frazione *irriducibile.*

Più frazioni possono essere trasformate in altre uguali rispettivamente ad esse e di ugual denominatore. Infatti, per es., le frazioni $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ sono rispettivamente uguali, per quanto si è detto, alle altre di ugual denominatore

$$\frac{adf}{bdf}, \frac{cbf}{bdf}, \frac{ebd}{bdf}.$$

Poichè da $x \gtreqless y$, $xb = a$, si rileva, essendo la moltiplicazione ad un sol valore, e dipendente, che rispettivamente $yb \gtreqless a$, ne viene che due frazioni di ugual denominatore sono da dirsi *uguali* allora e solo allora che hanno uguali numeratori. Se due frazioni di ugual denominatore positivo non sono uguali diremo *maggiore* quella che ha il numeratore maggiore, e *minore* l'altra: inversamente, se il denominatore è negativo.

Se di due frazioni ridotte, com' è sempre possibile, ad aver un ugual denominatore, si deve dire che la prima è maggiore, uguale o minore della seconda, lo stesso dovrà dirsi rispetto a qualunque altro denominatore si riducano. Infatti, siano le due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, e si rendano irriducibili, ed uguali allora rispettivamente ad $\frac{a'}{b'}$, $\frac{c'}{d'}$. Qualunque frazione da dirsi uguale ad $\frac{a'}{b'}$ deve avere i termini equimultipli di a' e b', giacchè da $xb'=a'$, $xb=a$ si rileva $x\,b'\,a = x\,b\,a'$, donde $b'a=ba'$, da cui discende facilmente $a=pa'$, $b=pb'$; lo stesso dicasi per le frazioni uguali a $\frac{c'}{d'}$. Ne viene che qualunque comune denominatore dev' essere multiplo di b' e d'. Sia m il minimo; le due frazioni ridotte ad esso diverranno $\frac{a''}{m}$, $\frac{c''}{m}$: qualunque altro denominatore comune deve essere multiplo di m, e i numeratori corrispondenti saranno

equimultipli di a'' e c''. Tutte le altre forme di queste due frazioni ridotte ad ugual denominatore saranno quindi $\frac{pa''}{pm}$, $\frac{pc''}{pm}$. Ora, secondochè $a'' \gtreqless c''$, sarà con qualunque p positivo $pa'' \gtreqless pc''$, e viceversa: e con qualunque p negativo sarà $pa'' \lesseqgtr pc''$, e viceversa. Il teorema è così dimostrato.

Date quindi due frazioni, una di esse è necessariamente da dirsi maggiore, uguale o minore dell' altra, ed ha luogo uno solo di questi casi. Sono chiaramente sodisfatte tutte le condizioni caratteristiche imposte ai concetti di maggiore, minore ed uguale.

8. Per definire l' addizione di due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, chiederemo che per essa valga rispetto alla moltiplicazione un caso particolare della proprietà distributiva, ossia

$$(30) \qquad \left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right) bd = \frac{a}{b} \cdot bd + \frac{c}{d} \cdot b\, d\,,$$

cioè, per la commutatività già dimostrata nel prodotto, per la sua associatività e per la definizione di frazione,

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right) b\, d = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right) d + \left(\frac{c}{d} \cdot d\right) b = ad+cb\,;$$

talchè, siccome si ha

$$\left(\frac{ad+cb}{bd}\right) b\, d = ad+cb,$$

per la dipendenza della moltiplicazione sarà, tenendo conto della (30),

$$(31) \qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}\,.$$

L' addizione così definita è ad un sol valore: poichè, se invece di $\frac{a}{b}$ si ponga una frazione $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$, dico che si ha la stessa somma. E infatti, se $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$, vuol dire che vi è una terza frazione irriducibile $\frac{p}{q}$ tale che $m=rp$, $n=rq$ ed $a=sp$, $b=sq$. Allora $\frac{a}{b} = \frac{sp}{sq}$: e quindi, tenendo conto della (9),

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{sp}{sq}+\frac{c}{d} = \frac{spd+sqc}{sqd} = \frac{s(pd+qc)}{sqd} = \frac{pd+qc}{qd}\,,$$

e parimente

$$\frac{m}{n}+\frac{c}{d} = \frac{rp}{rq}+\frac{c}{d} = \frac{pd+qc}{qd}\,,$$

onde

$$\frac{m}{n}+\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}, \text{ c. d. d.}$$

Inoltre, siccome se $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ sono disuguali, ridotte al medesimo denominatore hanno diguguali i numeratori, ne viene che potremo in generale indicare con $\frac{a}{b}$, $\frac{m}{b}$ $(a \lesseqgtr m)$ il caso generale di due frazioni disuguali. Allora

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd},$$

$$\frac{m}{b}+\frac{c}{d}=\frac{md+cb}{bd}.$$

Ma se $a \lesseqgtr m$, sarà, per la dipendenza dimostrata nella moltiplicazione dei numeri interi, $ad \lesseqgtr md$, e quindi $ad+cb \lesseqgtr md+cb$: onde le due somme precedenti sono disuguali, il che prova la dipendenza dell' addizione delle frazioni.

La nostra addizione è associativa e distributiva in generale, come facilmente si prova colla verificazione diretta, applicando le (28) e (31).

Poichè dalle due relazioni, dove ora i segni sono messi in evidenza,

$$xb=a, \quad yb=-a$$

si rileva $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{(-a)}{b}$, ne viene che

$$x+y=\frac{a}{b}+\frac{(-a)}{b}=\frac{ab-ab}{bb}=0.$$

I due numeri x ed y li diremo ancora *opposti*: l'uno si dirà *positivo*, l'altro *negativo*; e, perchè valga completamente il principio distributivo e quindi siano verificate le (23), diremo *positivi* i numeri frazionari che risolvono le equazioni (dove i segni sono posti in evidenza)

$$xb=a, \qquad x(-b)=-a,$$

e *negativi* quelli che che risolvono le altre

$$x(-b)=a, \qquad xb=-a;$$

talchè sarà

$$\frac{a}{-b}=-\left(\frac{a}{b}\right), \qquad \frac{-a}{b}=-\left(\frac{a}{b}\right), \qquad \frac{-a}{-b}=\frac{a}{b},$$

relazioni che esprimono la regola dei segni per la divisione.

La sottrazione delle frazioni è sempre possibile, giacchè, qualunque siano i segni di a, b, c, d, si ha

$$\left[\frac{a}{b}+\left(-\frac{c}{d}\right)\right]+\frac{c}{d}=\frac{a}{b},$$

e quindi

$$\frac{a}{b}+\left(-\frac{c}{d}\right)=\frac{a}{b}-\frac{c}{d}.$$

I numeri irrazionali. — 9. La classe dei numeri *razionali* (interi e frazionarii) si dimostra che è illimitata e di 1ª specie, ma non continua. D' altra parte, posto $x.\ x=x^2$, la soluzione dell' equazione $x^2=a$ quando a non è un quadrato perfetto presenta un' impossibilità, finchè siamo nel campo dei numeri razionali. Per voler rendere continua questa classe e render possibili queste operazioni (i quali scopi si vedrà che si possono raggiungere contemporaneamente) sarà quindi necessario introdurre nuovi numeri, che diremo *numeri irrazionali.* Essi sono destinati a riempire le sezioni che si riscontrano nella classe connessa dei numeri razionali; e, volendosi che la classe resti di 1ª specie anche dopo introdotti questi nuovi numeri che saranno limiti di queste sezioni, dovremo introdurne (§ 44) uno solo per ogni sezione, o meglio definire uguali tutti quelli che compariscono limiti di una medesima sezione. Data quindi una sezione qualunque della classe dei numeri razionali, cioè una divisione di tutti i numeri razionali in due gruppi tali che tutti i numeri del primo siano minori di tutti quelli del secondo e la differenza fra questi e quelli possa rendersi piccola a piacere, ad ogni sezione collegheremo un ente, che diremo suo limite, e che, secondo la definizione già data, dovra dirsi irrazionale.

10. Volendo che le definizioni che si daranno per questi nuovi numeri sodisfino alle solite proprietà ed insieme comprendano come caso particolare quelle che si danno per i numeri razionali, esamineremo le proprietà che presenta un numero razionale di fronte alla scomposizione in gruppi che esso determina nella classe dei numeri razionali, e quelle proprietà prenderemo a base della definizione da darsi per i numeri irrazionali.

Enunciamo dunque queste proprietà di cui godono i numeri razionali.

Un numero razionale a determina sempre una scomposizione degli altri numeri razionali in due gruppi, dei quali il primo contiene tutti i numeri razionali $<a$, il secondo quelli $>a$.

Se b è uguale al numero precedente a, sarà b maggiore di tutti i numeri del 1° gruppo e minore di tutti quelli del secondo. Viceversa, se b è un numero razionale maggiore di tutti i numeri razionali che sono minori di a, e minore di tutti quelli che ne sono maggiori, sarà $b=a$.

Se $b > a$, sarà b maggiore di un numero razionale, e quindi di infiniti, di quelli maggiori di a. Viceversa, se b è maggiore di un numero razionale $> a$, sarà $b > a$.

Se a e b sono numeri qualunque ed (α_1, α_2), (β_1, β_2) sono le coppie di gruppi di numeri razionali in cui essi rispettivamente decompongono la classe razionale, se a_1, a_2, b_1, b_2 sono numeri qualunque rispettivamente di α_1, α_2, β_1, β_2 sarà $a_1+b_1 < a+b < a_2+b_2$. Viceversa se $a_1+b_1 < c < a_2+b_2$, essendo a_1, a_2, b_1, b_2 scelti comunque in α_1, α_2, β_1, β_2, sarà $c=a+b$.

Da queste proprietà (le cui dimostrazioni facilissime e che si fondano sulle condizioni caratteristiche dei concetti di uguale, maggiore ecc. tralasceremo per brevità) discende che le definizioni richieste per i numeri irrazionali potranno darsi nel modo seguente.

Ogni numero irrazionale è disuguale ad ogni numero razionale.

Ogni numero irrazionale μ determina la scomposizione della classe dei numeri razionali in due gruppi (quelli corrispondenti alla sezione per riempire la quale s'è introdotto quel numero irrazionale): i numeri del primo gruppo sono minori dei numeri del secondo gruppo. Diremo che il numero μ è *maggiore* di tutti i numeri razionali del 1° gruppo, e *minore* di quelli del 2°.

Diremo *uguali* due numeri irrazionali, quando tutti i numeri razionali minori o maggiori del primo sono rispettivamente minori o maggiori anche dell' altro.

Se due numeri irrazionali α e β non sono uguali, li diremo *disuguali*; e diremo che α è *maggiore* di β e β *minore* di α, quando α è maggiore di uno, e quindi di infiniti, dei numeri razionali maggiori di β, e perciò β è minore di uno e quindi di infiniti dei numeri razionali minori di α.

Se α e β sono due numeri (uno almeno dei quali irrazionale) ed (α_1, α_2) (β_1, β_2) sono le corrispondenti scomposizioni in gruppi dei numeri razionali, indicando con a_1, a_2, b_1, b_2 numeri qualunque rispettivamente di quei quattro gruppi, e osservando che è sempre, qualunque essi siano, $a_1+b_1<a_2+b_2$, e

la differenza fra le somme a_1+b_1 e a_2+b_2 può rendersi piccola a piacere, diremo *somma* $\alpha+\beta$ di α e β il numero razionale o irrazionale che corrisponde alla divisione in gruppi $(\alpha_1+\beta_1\,,\ \alpha_2+\beta_2)$.

Con queste definizioni è facilissimo dimostrare che l' uguaglianza, la disuguaglianza, l' addizione dei numeri irrazionali fra loro e coi numeri razionali sodisfano alle solite condizioni caratteristiche: tralasceremo per brevità queste dimostrazioni, che non presentano la minima difficoltà. L' insieme dei numeri *reali* (cioè razionali o irrazionali) forma quindi una classe, la quale si vede facilmente che è continua.

Il prodotto di due numeri irrazionali e di un numero razionale per un irrazionale, α e β, essendo i due numeri α e β appartenenti alle scomposizioni rispettive $(\alpha_1\,,\ \alpha_2)$, $(\beta_1\,,\ \beta_2)$, si definisce come quel numero razionale od irrazionale appartenente alla scomposizione, che indicheremo brevemente con $(\alpha_1\beta_1\,,\ \alpha_2\beta_2)$, nella quale il 1° gruppo contiene tutti i prodotti di un numero qualunque di α_1 per uno qualunque di β_1, e il secondo tutti quelli di un numero qualunque di α_2 per uno qualunque di β_2.

Con questa definizione si prova che la moltiplicazione gode le proprietà ordinarie: e si mostra che esiste un numero x soluzione di $x^2=a\ (a>0)$, e più generalmente di $x^n=a\ (a>0)$.

Nella classe dei numeri reali si vedono possibili tutte le addizioni, moltiplicazioni, elevazioni a potenza, sottrazioni, divisioni ed estrazioni di radice, cioè soluzioni dell' equazione $x^n = a$, queste ultime purchè a sia un numero positivo.

I numeri complessi. — 11. Se volessimo spingere più oltre questa introduzione di nuovi enti collegati ancora con quelli già introdotti da relazioni di maggiore o di minore dotate delle ordinarie proprietà caratteristiche, dovremmo introdurre o numeri minori di tutti quelli reali, o numeri maggiori di tutti, o numeri maggiori di alcuni e minori di altri. Questi ultimi numeri α darebbero una scomposizione dei numeri reali in due gruppi, uno formato dai numeri $<\alpha$, l'altro dei numeri $>\alpha$. Scelti nei due gruppi tutti i numeri razionali, α sarebbe limite dei nuovi gruppi così risultanti; ma questi gruppi avevano già un limite a fra i numeri esistenti: quindi dovremmo togliere la condizione che ad una sezione corrisponda un numero solo come limite. Di più la differenza $a-\alpha$ o $\alpha-a$ sarebbe minore di tutti

i numeri reali (se si volesse che la nuova classe fosse propria e quindi che le differenze esistessero sempre): per cui questo caso equivarrebbe a quello in cui s' introducono numeri minori di tutti i numeri reali. In questo ultimo caso e nell' altro in cui s' introducessero numeri maggiori di tutti quelli reali, essendo la classe dei numeri reali continua, andremmo incontro a numeri appartenenti a classi di 2ª specie (numeri di grado 2°, 3°,... n°, §§ 141 e segg.), fra i quali del resto neppure troveremmo le soluzioni dell'equazioni (che pure coi numeri reali restano insolute) $x^2 = -1$, o $x^2 = -a^2$.

Per rendere solubili queste equazioni e per estendere ancora il campo dei numeri senza cadere in classi di 2ª specie, dovremo quindi cercare di introdurre nuovi numeri, i quali con quelli reali non siano legati da relazioni di maggiore o minore, ma solo da semplice relazione di disuguaglianza.

L' equazione $x^2 = -1$ la renderemo risoluta con un nuovo numero i, che diremo *numero immaginario* (e precisamente *unità immaginaria*), il quale quindi gode la proprietà

$$i \cdot i = -1,$$

e del quale diremo solo che è *disuguale* a qualunque numero reale, senza definire se ne è maggiore o minore.

12. La moltiplicazione si esigerà in generale dotata delle solite proprietà. Avremo allora che con $b\,i\,(= i\,b)$ dovremo intendere un nuovo numero che ci rappresenti il prodotto di b per i, colla condizione della distributività espressa da

$$ai + bi = (a+b)\,i,$$

la quale relazione definisce anche la somma dei due numeri $a\,i$ e $b\,i$.

L' addizione di un numero reale a con uno immaginario $b\,i$ la definiremo dandole per risultato un nuovo numero (*numero complesso*) $a + b\,i$; per la commutatività, definiremo

$$a + b\,i = b\,i + a;$$

diremo *uguali* due numeri complessi $a + b\,i$ e $c + d\,i$ allora e solo allora che sia $a=c$ e $b=d$. L' addizione di due numeri complessi, perchè la vogliamo commutativa ed associativa, darà

$$(a+bi) + (c+di) = (a+bi) + (di+c) = \Big(a + (bi+di)\Big) + c = (a+c) + \\ + (bi+di) = (a+c) + (b+d)\,i.$$

Con questa definizione si vede subito che l'addizione è un' operazione ad un sol valore, dipendente, commutativa ed associativa.

Il prodotto lo vogliamo distributivo, e dovrà quindi essere

$$(a+bi)\,(c+di) = (a+bi)\,c + (a+bi)\,di = ac + bic + adi + bi\,di:$$

cioè, se lo vogliamo commutativo ed associativo, e tenendo conto che $i^2=-1$,

$$(a+bi)\,(c+di) = ac + bci + adi - bd = (ac-bd) + (bc+ad)\,i.$$

Così definito, si prova subito colla verificazione diretta che il prodotto gode le solite proprietà caratteristiche, quelle cioè di essere commutativo, associativo e distributivo. Di più, esso non è zero se non lo è qualcuno dei fattori. Infatti da

$$(a+bi)\,(c+di) = m+ni,$$

se il prodotto dev'esser zero, dovremo avere $m=0$, $n=0$. Ma dalla relazione precedente si rileva l' altra

$$(a-bi)\,(c-di) = m-ni\,,$$

e moltiplicando le due relazioni insieme si ha

$$(a^2+b^2)\,(c^2+d^2) = m^2+n^2\,.$$

Se $m=0$, $n=0$ sarà quindi $(a^2+b^2)\,(c^2+d^2)=0$: e quindi, essendo (a^2+b^2) e (c^2+d^2) numeri reali, dev' essere zero l'uno di essi. Ma se, per es., $a^2+b^2=0$, essendo a^2 e b^2 ambedue non negativi, dovrà essere $a=0$, $b=0$, e quindi $a+b\,i=0$.

13. I numeri complessi ora introdotti appariscono tutti come somme di numeri di due specie; gli uni reali, gli altri formati dal prodotto di un numero reale per uno non reale. Ma osservando che questi secondi numeri bi sono costituiti di fronte ad i come i numeri reali di fronte alla loro unità 1, potremo definire in questi numeri che sia $ai \gtreqless bi$, secondochè $a \gtreqless b$. Allora la classe dei numeri puramente immaginari ai diviene una classe continua ad una dimensione, ed i numeri complessi appariscono come somme di numeri scelti in due classi continue differenti.

14. Le ordinarie operazioni su questi numeri complessi conducono senza eccezione di nuovo a numeri della medesima specie; nonostante si può tentare una ulteriore generalizzazione di questi numeri, introducendo i numeri complessi ad n dimensioni, quelli cioè che risultano dalla somma di numeri scelti in classi continue di n specie differenti, ossia tali che le loro unità siano da dirsi disuguali.

Se $i_1, i_2, \ldots i_n$ indicano queste unità ed $a_1, a_2, \ldots a_n$ altrettanti numeri reali, intenderemo con $a_r\, i_r$ un ente di una classe continua ad una dimensione di cui l' unità è i_r, il quale rispetto ad i_r sia misurato da a_r: questo ente, da dirsi pure *numero*, si chiamerà *prodotto* di a_r per i_r, e si riterrà commutativo. Per *addizione* di questi numeri intenderemo un' operazione associativa e commutativa, che collega ad essi come risultato un nuovo ente

$$\alpha = a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots\ldots + a_n i_n,$$

che è un *numero complesso ad n dimensioni.*

La somma di due di questi numeri

$$\alpha = a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots\ldots + a_n i_n, \qquad \beta = b_1 i_1 + b_2 i_2 + \ldots\ldots + b_n i_n$$

si definirà per mezzo delle proprietà associativa, commutativa e distributiva che vogliamo in essa, con

$$\alpha + \beta = (a_1+b_1)\, i_1 + (a_2+b_2)\, i_2 + \ldots\ldots + (a_n+b_n)\, i_n,$$

e così definita si dimostra che gode effettivamente quelle proprietà.

Il prodotto di quei due numeri, perchè si vuole distributivo, associativo e commutativo, dovrà definirsi così:

$$\alpha\beta = \sum_1^n{}_m \sum_1^n{}_p\ a_m\, b_p\, i_m\, i_p.$$

Se vogliamo peraltro che questo prodotto sodisfi ad una delle leggi fin qui trovate per la moltiplicazione, cioè che esso sia un numero della classe, si è già dimostrato (§ 130) che dobbiamo rinunziare ad un' altra proprietà caratteristica, quella cioè che il prodotto si annulli *solo* quando si annulla almeno uno dei fattori, tranne se i numeri complessi sono gli ordinari a due dimensioni, dei quali si è parlato ai §§ 11 e 12 di questa appendice.

Ne viene quindi che, finchè non si vuol rinunziare a nessuna delle leggi caratteristiche della moltiplicazione, lo studio dei numeri deve limitarsi a quello dei numeri reali e dei numeri complessi a due dimensioni, in cui per le due unità 1 ed i si ha

$$1.1 = 1\,, \quad 1.i = i.1 = i\,, \quad i.i = -1.$$

Principio di permanenza delle leggi formali. — 15. In questo rapido cenno che si è dato della successiva generalizzazione del concetto di numero per la sua introduzione con metodo analitico, si è visto come si sia sempre

richiesto che le definizioni dei concetti di uguale, minore, maggiore e quelli delle varie operazioni sodisfacciano costantemente alle medesime condizioni formali, senza preoccuparci del resto di dare per questi concetti definizioni con significati effettivi. La ragione sta in questo: che siccome nel calcolo si usano simboli per indicare numeri qualunque senza specificarli, così le operazioni su di essi non si possono eseguire ma semplicemente accennare, e quindi le proprietà da studiarsi saranno quelle che unicamente discendono da proprietà di queste operazioni accennate, cioè dalla forma stessa delle espressioni con cui si indicano queste operazioni e relazioni. E per potere con un simbolo unico indicare un numero qualunque fra tutti quelli introdotti e non essere costretti a fare continue distinzioni, è da cercare che i simboli delle operazioni o delle relazioni reciproche godano le medesime proprietà, qualunque sia la specie di numero cui si applicano. Questo principio, che è la base della successiva generalizzazione del concetto analitico di numero, è detto da Hankel *principio di permanenza delle leggi formali* (1).

(1) Circa le teorie del numero considerato dal punto di vista didattico, rimando ad un articolo " Sul concetto di numero " da me pubblicato in proposito sul " Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario " Anno II. Fasc. 4 e 5.

ERRATA-CORRIGE

PAG. 8	VERSO	3 ris.	*invece di*	R. Grassmann	*leggere*	H. Grassmann
„ 13	„	2 ris.	„	id.	„	id.
„ 14	„	7 dis.	„	vogliano	„	vogliamo
„ 21	„	10 ris.	„	§ 20, 5°	„	§ 25, 8° e quella (4) del § 8
„ 90	„	8 dis.	*sopprimere la virgola*			
„ 93	„	17 dis.	*aggiungere il titolo* “ **Moltiplicazione e divisione** „			
„ 146	„	9 dis.	*invece di*	ne	*leggere*	nè
„ 155	„	6 ris.	„	$+ \alpha^{(n)} 1_{(n)}$	„	$+ \alpha^{(n-1)} 1_{(n-1)}$
„ 161	„	6 dis.	„	esse	„	essi
„ 163	„	2 ris.	„	vi	„	si
„ 164	„	10 dis.	„	$a(2+1)$	„	$a(3+1)$
„ 167	„	8 dis.	„	$a+b$	„	$a+b'$
„ 171	„	12 dis.	„	$x \geqq y$	„	$x \leqq y$
„ ivi	„	13 dis.	„	$y\,b \geqq a$	„	$y\,b \leqq a$
„ 172		*portare il numero* (30) *alla formula successiva*				
„ ivi	„	4 ris.	*invece di*	$\frac{a}{b} = \frac{sp}{sq}$	*leggere*	$\frac{a}{b}$ è della forma $\frac{sp}{sq}$

ISTITUTO ANATOMICO DELLA REGIA UNIVERSITÀ DI PISA

Dott. DANTE BERTELLI Dissettore

ANATOMIA COMPARATA DELLA MEMBRANA DEL TIMPANO

Le ricerche comparative di anatomia sistematica e di anatomia istologica furono fecondissime di risultati che dettero base scientifica alla teoria della discendenza e condussero in oltre a chiarire forme e strutture complicate. Ma di questo indirizzo razionale non si tenne conto abbastanza per la membrana del timpano, chè studii pazienti, accuratissimi furono fatti solamente in quella dell'uomo; credo quindi che non sia opera inutile far prova di portare nuovo contributo alla anatomia della membrana del timpano ponendo a base delle ricerche la indagine comparativa.

La membrana del timpano manca nei Pesci; apparisce negli Anfibii nell'ordine degli Anuri; della classe dei Rettili trovasi in alcuni Sauri, nei Coccodrilli, nei Cheloni; la posseggono gli Uccelli, i Mammiferi. È dagli Anfibii adunque che incominciano le mie ricerche.

ANFIBII

Nell'ordine degli Anfibii solamente gli Anuri posseggono membrana del timpano.

Non mi fu possibile avere esemplari di Apodi; degli Urodeli studiai il *Triton cristatus*.

Degli Anuri potei studiare individui del 2° sotto-ordine in due famiglie, in quella delle Rane ed in quella dei Bufonidi; ho studiato anche individui

del 3° sotto-ordine nella sotto-famiglia delle Hyline. Nella famiglia delle Rane esaminai la *Rana esculenta* e la *Rana temporaria;* nella famiglia dei Bufonidi il *Bufus vulgaris,* nella sotto-famiglia delle Hyline l'*Hyla arborea.*

Prima di esporre i risultati delle mie indagini, riassumo le cognizioni che già furono acquisite sulla anatomia della membrana timpanica negli Anfibii.

Iacobaeus (1) accennò alla membrana del timpano nella Rana, che ammetteva fosse posta sotto la pelle.

Geoffroy (2) studiò la membrana timpanica della Rana; anche egli ammise risiedesse sotto la pelle la quale presenterebbesi assottigliata in corrispondenza della membrana del timpano; la membrana timpanica sarebbe una specie di placca esattamente rotonda e cartilaginosa; descrisse la columella che si applicherebbe sul centro della membrana timpanica, alla faccia interna di questa. *Geoffroy* affermò che il Rospo non ha membrana del timpano cartilaginea; che la membrana timpanica è sottocutanea, di estrema sottigliezza, ad essa si applica semplicemente la columella. *Geoffroy* affermò inoltre che nelle Salamandre acquatiche non è membrana del timpano.

Comparetti (3) considera nella membrana timpanica della Rana due lamine, una cutanea ed una interna unita con la cartilagine timpanica e con la columella, suppone che alcune fibre aderenti al pezzo distale di questa siano carnose.

Scarpa (4) ricorda per incidenza la membrana timpanica della Rana e del Rospo, quando al paragrafo XXVII cerca dimostrare l'affinità di struttura fra l'organo dell'udito dei Pesci cartilaginei e quello di alcuni Anfibii e Rettili; ammette che la cute ridotta di spessore rappresenti la membrana del timpano. Afferma inoltre che la Salamandra acquatica non possiede meato auditorio esterno, membrana timpanica, ossetti, cavità timpanica, tuba Eustachiana.

---

(1) Iacobaeus O. *De Ranis observationes.* Paris, 1676.

(2) Geoffroy. *L'organe de l'ouie des Reptiles.* (Mémoires de Mathematique et de Physique présentés à l'Académie Royale des Scien. par divers Savans. Tome seconde). Paris, MDCCLV.

(3) Comparetti A. *Observationes anatomicae de aure interna comparata.* Patavii, MDCCLXXXIX.

(4) Scarpa A. *Anatomicae disquisitiones de auditu et olfactu.* Mediolani, MDCCXCIV.

Windischmann (1) riguardo alla membrana del timpano della Rana si limita ad affermare che è tesa sopra un anello cartilagineo.

Duméril (2) scrive che la membrana del timpano è manifesta nella Rana per il colore o la finezza della pelle; che non scorgesi però nel Rospo.

Leydig (3) considera membrana del timpano solo quella membranella che tolta la pelle rimane aderente alla grande apertura della cartilagine timpanica. Secondo questo ricercatore la membrana del timpano nella Rana è costituita da tessuto connettivo tra i fasci del quale sono mescolate fibre muscolari liscie, queste sarebbero a direzione raggiata e formerebbero un anello alla periferia della membrana timpanica; sul mezzo e all' intorno della inserzione della columella si troverebbero fibre elastiche. Nella porzione di pelle che ricopre la membrana del timpano sarebbero glandule divenute più piccole a paragone di quelle della pelle circonvicina.

Ricerche comparative sulla membrana del timpano furono fatte la prima volta con vero rigore scientificco da *Moldenhauer* (4) il quale la studiò anche nei Batraciani e di quest' ordine prese in esame speciale la *Rana esculenta*. Ebbe il merito di descrivere per il primo le modificazioni subite dalla pelle in corrispondenza della membrana del timpano, fece oggetto delle sue ricerche la membranella che resta attaccata alla cartilagine timpanica dopo tolta la pelle e che egli chiamò membrana propria; descrisse l' epitelio che riveste la faccia interna della propria; accennò al rapporto della columella con questa membrana; fece la ricerca istologica delle fibre muscolari lisce che furono intraviste da *Comparetti* ed osservate, ma non bene descritte da *Leydig*.

Retzius (5) nelle classiche ricerche sull' organo dell' udito degli Anfibii si occupa per incidenza anche della membrana timpanica della *Rana esculenta;* afferma che risiede sotto la pelle la quale presenta quivi un leggero avvallamento, primo indizio di orecchio esterno. Descrive la struttura della membrana del timpano secondo i concetti di *Leydig*, però non ricorda le

---

(1) Windischmann C. I. H. *De penitiore auris in Amphibiis structura.* Lipsiae, 1831.

(2) Duméril A. M. C. *Erpetologie générale ou Histoire naturelle complète des Reptiles.* Paris, 1834.

(3) Leydig F. *Traité d' Histologie traduit de l'allemand par* Lahillonne. Paris, 1866.

(4) Moldenhauer W. *Vergleichende Histologie des Trommelfells.* (Archiv f. Ohrenheilkunde, Bd. XIII, 1877).

(5) Retzius G. *Das Gehörorgan der Fische und Amphibien.* Stockholm, 1881.

fibre elastiche; aggiunge che la membrana timpanica è nella sua faccia interna rivestita da epitelio cilindrico basso. Anche *Hoffmann* (1), *Wiedersheim* (2), *Vogt* e *Yung* (3) ammettono che la membrana del timpano risieda sotto la pelle.

Schwalbe (4) nel Trattato degli organi dei sensi, riportando la opinione di *Leydig* e di *Moldenhauer* riguardo alla presenza delle glandule sulla pelle che corrisponde alla membrana del timpano della Rana, chiama questa porzione di pelle: strato cutaneo della membrana timpanica.

Queste sono le cognizioni che ho potuto raccogliere intorno alla membrana del timpano negli Anfibii, ora passo ad esporre i risultati delle mie ricerche, ottenuti nel *Triton cristatus*, nella *Rana esculenta*, nella *Rana temporaria*, nel *Bufo vulgaris*, nell' *Hyla arborea*.

URODELI

Triton cristatus.

Degli Urodeli studiai il *Triton cristatus*.

Alla osservazione macroscopica non si scorgono sulla pelle che riveste la parte laterale della testa, al di dietro dell' orbita, nessuna di quelle apparenze che negli Anuri, anche ad occhio nudo, fanno con chiarezza discernere la membrana timpanica.

Tolta la pelle, esaminatala per trasparenza, si vede che nella porzione situata tra l'orbita e l'estremo posteriore del cranio è assai sottile, ma questa sottigliezza non è come nella Rana, nel Rospo e nell'*Hyla arborea* limitata, ciò vedremo fra breve, ad un' area bene circoscritta. Sulla pelle che trovasi subito al di dietro della capsula auditiva si nota una leggera incavatura con la quale si pone in rapporto l'episternale primo. La columella (5), disco cartilagineo che chiude la finestra ovale, è ricoperta dai muscoli.

---

(1) HOFFMANN C. K. *Reptilien*. (Bronn' s Klassen und Ordnungen des Thierreichs).

(2) ECKER A. *Die Anatomie des Frosches*. (Lehre von den Sinnesorganen bearbeitet von R. Wiedersheim). Braunschweig, 1882.

(3) VOGT C. et YUNG E. *Traité d'Anatomie comparée*. Paris, 1892.

(4) SCHWALBE G. *Lehrbuch der Anatomie der Sinnesorgane*. Erlangen, 1877.

(5) A proposito della columella, erroneamente si esprimono VOGT e YUNG scrivendo: « La caisse du tympan, la membrane tympanique, la columelle et la trompe d' Eustache font defaut chez les Urodeles.

ANURI

Rana esculenta.

La membrana del timpano nella *Rana esculenta* è in intimo rapporto con la cavità timpanica, forma la parete laterale di questa.

La cavità timpanica nella *Rana esculenta* è posta sulla parte laterale del cranio tra il prootico e la membrana del timpano (Fig. 1), comunica largamente per mezzo della tromba Eustachiana con la cavità orale, si considerano in essa *due porzioni* (Fig. 1) che avuto riguardo alla loro posizione si chiamano *laterale* e *mediale*, la membrana del timpano forma la parete esterna della prima di queste porzioni. Debbo occuparmi, sia pure brevemente, della porzione laterale a causa del rapporto intimo che prende con essa la membrana del timpano ed anche perchè dagli anatomici fu un po' trascurata.

La porzione laterale della cavità timpanica è costituita da un pezzo cartilagineo, da parte del processo inferiore del timpanico e da parti molli (mucosa, membrana del timpano), è attraversata dalla columella. Il pezzo cartilagineo che potrebbe chiamarsi *cartilagine timpanica* (1), denominazione ricordata da *Windischmann*, è situato al di dietro dell' orbita, al di sopra del giugale, all' esterno del timpanico, allo esterno e al davanti di quella massa muscolare che trovasi tra l'estremo posteriore del pterigoideo e l'articolazione prootico-timpanica.

A formare la porzione laterale della cavità timpanica contribuisce in piccola parte anche l'osso timpanico con la faccia esterna del suo processo inferiore.

La cartilagine timpanica è un tronco di cono cavo (2) con la grande apertura rivolta all'esterno, la piccola immette nella porzione interna della cavità timpanica e nella tromba Eustachiana. La grande apertura è quasi circolare e ad essa si attacca la membrana del timpano, l'apertura piccola

---

(1) Questa cartilagine da RETZIUS è chiamata *Annulus membranae tympani;* HOFFMANN e WIEDERSHEIM la ricordano anche con il nome di *Annulus tympanicus*, denominazioni che stabilirebbero omologie non dimostrate e che non convengono nemmeno alla forma della cartilagine timpanica.

(2) HASSE ed HOFFMANN crederono che la cartilagine timpanica in alto ed in avanti fosse interrotta, ma ciò non è; questo errore fu corretto da RETZIUS.

è ovoidale. La cartilagine timpanica è jalina; nelle sezioni trasverse il margine di essa che costituisce la grande apertura appare in tutta la sua estensione leggermente ripiegato dall' esterno all' interno (Fig. 1).

L'apertura laterale della cartilagine timpanica è chiusa dalla membrana del timpano che si attacca al suo contorno.

La membrana del timpano nella *Rana esculenta* apparisce all'indagine macroscopica come una piccola superficie della pelle, quasi rotonda, la quale è bene visibile perchè alla periferia mostra un leggero rilievo. Del resto concorre a rendere manifesta la membrana del timpano anche una speciale colorazione che quantunque abbia molta somiglianza con quella della pelle vicina, pure si fa distinguere da questa per un leggero tono diverso.

Intorno al centro della membrana, osservando attentamente, si scorge sempre un'area più scura, quasi circolare, che ha un diametro di circa due millimetri; da essa si vede che parte verso l' alto e l' indietro un tratto lineare sottilissimo il quale è chiaramente manifesto perchè traversa quella porzione di membrana timpanica che è più trasparente. La pelle in corrispondenza della membrana timpanica presenta un leggero avvallamento che *Retzius* interpretò giustamente come il primo accenno all'orecchio esterno, questa disposizione la troveremo anche più manifesta nel *Bufo vulgaris* e nell' *Hyla arborea.*

Sollevata la pelle, questa nella sua superficie mediale in corrispondenza della membrana del timpano, apparisce di colore oscuro e molto ridotta nel suo spessore (sembra che abbia perduto il derma).

L'assottigliamento nettamente limitato e la colorazione oscura a margini precisi rendono manifestissima quella parte di pelle che contribuisce a formare la membrana del timpano. Osservata questa porzione di pelle per trasparenza, si vede che alla periferia è molto sottile, poi sussegue una zona anche più sottile e al centro si mostra ora evidente quell'area scura che ho già descritta ed il prolungamento che parte da essa.

Tolta la pelle, al di sotto di questa rimane adesa alla periferia grande della cartilagine timpanica una sottilissima membrana biancastra, nel mezzo alla quale si scorge per trasparenza, l'estremità distale della columella; questa membrana risulta dello strato medio e dello strato interno della membrana timpanica. La porzione di columella che si unisce a questa mem-

brana appare in forma di clava con il rigonfiamento rispondente al centro della membrana, con lo stelo decorrente verso l'alto ed all'indietro.

Remossa finalmente anche questa membranella, si penetra nella porzione laterale della cavità timpanica.

Osservando la faccia mediale della membrana del timpano, si vede che il pezzo distale della columella sporge su di essa.

Tali sono le apparenze macroscopiche della membrana timpanica nella *Rana esculenta;* ora esporrò i risultati ottenuti con la ricerca microscopica incominciando da quelli ottenuti sullo strato cutaneo.

Diviso per metà antero-posteriormente un cranio di *Rana esculenta,* lo riducevo in modo da avere due pezzi che contenessero membrana del timpano, timpanico, prootico e piccola porzione dei tessuti circonvicini. Fatte subire ai pezzi le manipolazioni necessarie fino ad averli pronti per essere tagliati in serie, facevo sezioni trasverse della membrana timpanica incominciando a sezionare dalla periferia nella parte inferiore di questa. Ecco cosa si scorge in tali sezioni.

La pelle in corrispondenza della membrana del timpano subisce modificazioni degne di essere studiate accuratamente. Tutti gli elementi della cute concorrono alla formazione della membrana del timpano.

Lo strato corneo non si modifica; il più delle volte apparisce nelle sezioni sollevato dal corpo mucoso di Malpighi.

Il corpo mucoso di Malpighi fu studiato da *Moldenhauer;* lo divise in tre strati e descrisse le modalità delle cellule che li costituiscono, però *Moldenhauer* non studia le variazioni di spessore del corpo mucoso nelle diverse altezze della membrana timpanica; queste variazioni devono essere investigate perchè, come vedremo, hanno molta importanza.

Il corpo mucoso di Malpighi già ai primi tagli apparisce leggerissimamente ridotto (Fig. 2) e la riduzione seguita grado a grado per raggiungere il suo massimo (Fig. 3) immediatamente prima che incominci in prossimità della columella un ispessimento il quale si accentua ancora di più sulla faccia esterna di essa; in corrispondenza di questo ispessimento il corpo mucoso di Malpighi torna alto come alla periferia (Fig. 4, 5).

Lo strato pigmentario alla periferia della membrana timpanica è di poco assottigliato (Fig. 2) a paragone di quello della pelle circonvicina, poi

le cellule divengono sempre più rade a misura ci avviciniamo alla columella (Fig. 3), in corrispondenza dell'ispessimento sopra ricordato, le cellule pigmentarie riappariscono con tutte le modalità che avevano nella pelle circonvicina alla membrana del timpano (Fig. 4, 5).

Seguitando ad esporre le modificazioni che la cute subisce in corrispondenza della membrana del timpano, debbo ora studiare il derma. Subito ai primi tagli si scorge che il derma in piccola parte concorre a formare la membrana del timpano (Fig. 2), la massima parte passa al di dietro della cartilagine timpanica. A misura si sale nei tagli si vede che una quantità di derma, sempre più piccola, prende parte a formare la membrana del timpano (Fig. 3), il resto passa, al solito, dietro alla cartilagine timpanica. In corrispondenza della columella e dello ispessimento che trovasi intorno ad essa il derma torna a crescere e raggiunge uno spessore che è quasi la metà del derma della pelle circonvicina (Fig. 4, 5).

Come nei Mammiferi lo strato cutaneo si assottiglia dalla periferia verso il centro della membrana timpanica e sul martello torna a farsi spesso, nella stessa maniera si comporta lo strato cutaneo della membrana timpanica nella Rana rispetto alla columella.

La pelle della *Rana esculenta* contiene glandule in abbondanza, debbo ricercare come queste si comportano in quella porzione di pelle che concorre a formare la membrana del timpano.

Leydig per il primo affermò che esistono glandule nella porzione di pelle che ricopre la membrana del timpano (egli considera questa porzione di pelle estranea alla membrana timpanica). Dopo *Leydig*, *Moldenhauer* accennò a tali glandule. Espongo ora i risultati da me avuti a questo proposito nei tagli trasversi. Appena in questi apparisce la sezione della cartilagine timpanica sotto forma di nucleo cartilagineo ovale, sulla pelle, in corrispondenza della membrana del timpano diminuiscono talmente le glandule a paragone di quelle che trovansi nella cute limitrofa, che nelle sezioni più di due o tre non se ne scorge e si mantengono così rade (Fig. 2, 3) fino là ove ho affermato che il derma riacquista in spessore, quivi in un taglio si arriva a contarne fino 8, tornano cioè tanto fitte (Fig. 4, 5) come erano nella pelle circonvicina alla periferia della membrana timpanica.

Tutte queste variazioni subite dalla cute e che ho descritte nelle se-

zioni, si confermano pienamente nei preparati *in toto*, fatti in questa guisa. Si tenga per 3-4 giorni la parte laterale della testa di una Rana, rivestita dalla cute, in alcool al terzo, si può allora facilmente dividere la cute che prende parte alla formazione della membrana del timpano, dalla membranella sottostante che ho già ricordata.

Fatti con questi frammenti preparati istologici, anche ad occhio nudo si scorgono per trasparenza chiaramente, particolarità degne di nota. Si conferma che la pelle in corrispondenza della membrana del timpano è assottigliata ed ha figura quasi rotonda, molto trasparente alla periferia e più trasparente ancora fino in vicinanza del centro, ove notasi la macchia opaca che si prolunga verso la periferia in forma di striscia sottile, macchia e striscia che corrispondono alla superficie laterale del pezzo distale della columella.

Ma questi preparati in superficie si prestano benissimo anche all'esame microscopico; questo ci conferma i risultati avuti nelle sezioni. In fatti, procedendo nella osservazione dalla periferia verso il centro, si scorge il graduale assottigliamento del corpo mucoso di Malpighi e la diminuzione delle cellule pigmentarie fino in prossimità della columella. In vicinanza ed in corrispondenza della columella si vede che tornano nella loro disposizione normale il corpo mucoso di Malpighi e lo strato pigmentario.

Le glandule ed i loro dutti sono in questi preparati così chiaramente visibili che si potrebbero facilmente contare. A proposito della distribuzione delle glandule si confermano i reperti avuti nei tagli.

Anche le variazioni subite dal derma sono bene visibili in questi preparati.

Jacobaeus e *Geoffroy* ammisero che la membrana del timpano risiedesse nella Rana, sotto la pelle. *Comparetti* considera la pelle parte della membrana del timpano. *Scarpa* e *Duméril* affermarono la membrana del timpano non essere altro che la pelle assottigliata, non conobbero quella sottilissima membrana posta al disotto della cute. I moderni (*Leydig*, *Hoffmann*, *Retzius*, *Wiedersheim*, *Vogt* e *Yung*) escludono dalla membrana del timpano la pelle e considerano membrana timpanica soltanto la membrana situata al di sotto della cute. Solo *Moldenhauer* studiando la membrana del timpano nella *Rana esculenta* descrisse, nel modo che abbiamo veduto, anche la por-

zione cutanea. Meritava quindi che sulle modificazioni subite dalla pelle in corrispondenza della membrana del timpano mi intrattenessi lungamente.

La pelle compresa entro il margine che limita la grande apertura della cartilagine timpanica deve considerarsi come parte integrante della membrana del timpano perchè quivi la pelle si modifica per divenire atta a compiere una nuova funzione. È notorio come nei vertebrati superiori formi la pelle profondamente modificata lo strato esterno della membrana del timpano, questa disposizione che s'incontra nei vertebrati superiori è omologa a quella che ho descritta nella *Rana esculenta.*

Sotto lo strato cutaneo della membrana del timpano è quella membranella che gli anatomici considerano da sola membrana del timpano e della quale ho già fatto la descrizione macroscopica. Questa membranella è con la sua superficie laterale strettamente unita alla porzione cutanea (Fig. 1, 2, 4, 5) la sua faccia interna è rivestita da epitelio che proviene dalla mucosa della cassa timpanica. Alla membranella posta sotto la porzione cutanea *Moldenhauer* dette il nome di *membrana propria;* tale denominazione sarebbe stata giustissima se da questa membrana avesse escluso l'epitelio che proviene dalla cavità timpanica, il quale, se vogliamo stabilire delle omologie logiche, deve considerarsi come strato interno della membrana timpanica. Chiamo quindi *strato medio o membrana propria* quello che è situato fra la porzione cutanea e lo strato interno.

Lo strato medio della membrana del timpano è sottilissimo, si presta bene ad essere studiato nei preparati in superficie. In questi preparati si scorge chiaramente che la membrana propria è costituita da fibre di tessuto connettivo a direzione raggiata. Sulla columella le fibre sono più robuste, più numerose, stipate e si incrociano in vario senso tra loro; lasciata la columella assumono la direzione raggiata mantenendosi fitte e grosse in vicinanza della columella, si assottigliano e si diradano a misura che spingonsi verso la periferia ove si confondono con un muscolo a fibre lisce il quale ha disposizione raggiata dalla periferia verso il centro.

Colorando la membrana propria con azzurro di anilina si scorgono bene le fibre connettive e le fibre muscolari lisce, colorando la propria con ematossilina si mettono bene in evidenza i nuclei delle cellule fisse del connettivo che si trovano fra le fibre e si mettono bene in evidenza i nuclei

di forma ovoidale delle cellule epiteliali che rivestono la faccia interna della propria.

Nella Fig. 2 si vedono tagliate trasversalmente le fibre muscolari lisce della propria, nelle Fig. 4, 5 si vedono tagliate trasversalmente le fibre connettive e si scorge chiaramente come queste siano molto robuste e fitte sulla faccia esterna della columella ed in prossimità di essa.

Comparetti intravide per il primo fibre carnose nella membrana timpanica della *Rana esculenta*, considerandole come muscolo tensore. *Leydig* verificò la presenza di fibre muscolari lisce nella membrana propria affermando che alla periferia costituiscono un muscolo anulare. *Moldenhauer* riprodusse in una esatta figura questo muscolo e lo chiamò con denominazione giustissima, già accennata da *Comparetti*, *musculus tensor tympani*. Oltre queste nella membrana del timpano della *Rana esculenta* sono ammesse altre fibre muscolari lisce *(Leydig, Retzius, Wiedersheim)* ma la presenza di queste non ho potuto verificare.

Al di sotto della propria è lo strato interno della membrana timpanica, lo *strato* ché potrebbe chiamarsi *mucoso* per seguire la nomenclatura adoperata nei vertebrati superiori. È costituito da epitelio pavimentoso semplice, *Retzius* lo considera a torto cilindrico molto basso; fa seguito a quello della cavità timpanica che è cilindrico vibratile, ma in corrispondenza della membrana timpanicà si abbassa tanto da divenire pavimentoso e perde le ciglia vibratili: a formare questo strato prendono parte anche poche fibre connettive che derivano dalla mucosa dell'orecchio medio.

Per dimostrare la struttura della membrana timpanica della Rana in corrispondenza della columella, ho dovuto fare attraverso a questa tagli in serie dai quali si comprende bene anche il rapporto tra membrana timpanica e columella; siccome questo rapporto presenta grande somiglianza con quello che esiste nella classe dei Mammiferi tra membrana timpanica e manico del martello, così non credo inutile descrivere tale rapporto.

Il pezzo distale della columella si unisce intimamente alla membrana del timpano. Ho già riferito su i rapporti che presenta alla semplice ispezione la columella con la membrana timpanica, ora espongo il risultato delle ricerche microscopiche. Su i primi 4 o 5 tagli trasversi, procedendo dal basso all'alto, la sezione della columella è ovoidale, poi presentasi trian-

golare. Si possono allora distinguere in essa tre superfici (Fig. 4) una laterale, una ventrale, una dorsale; quivi i rapporti della columella con la membrana del timpano appariscono bene manifesti. La superficie laterale è in stretto rapporto con i fasci che costituiscono la membrana propria, questi si fondono intimamente con il pericondrio della columella; la superficie ventrale e dorsale della columella sono ricoperte dallo strato interno della membrana del timpano. A misura ci si innalza con i tagli, la forma triangolare comincia a farsi ovalare e la columella allontanasi dalla membrana propria con la quale resta in rapporto per mezzo di un piccolo cordone, un peduncolo (Fig. 5); in questi tagli essendo la sezione della columella ovalare, si mostra attaccata con il polo esterno (Fig. 5) alla membrana propria. Il peduncolo che unisce la propria alla columella, come pure la sezione della columella sono tappezzate dall' epitelio che costituisce lo strato interno. Intanto la columella a misura si discosta dalla membrana propria si spinge in alto ed internamente per raggiungere la porzione interna della cavità timpanica.

I vasi sanguigni formano nello strato cutaneo una rete a maglie fitte. I vasi che la costituiscono provengono dalla cute limitrofa e da una arteria che decorre parallelamente alla columella sulla faccia laterale di questa. L' arteria arrivata al terzo inferiore della columella si sdoppia per costituire un laccio il quale va ad abbracciare la columella nel suo estremo inferiore. Da tutto il tratto di questa arteria partono rami numerosi in direzione raggiata verso la periferia, tutti questi rami si raccolgono in due vene satelliti dell' arteria. Ad anastomizzarsi con i vasi dello strato esterno, giungono ramoscelli provenienti dalla mucosa della cavità timpanica. I vasi di questa mucosa giunti alla periferia della membrana del timpano la massima parte ivi si arrestano, si anastomizzano e formano anse con la convessità rivolta alla periferia della membrana timpanica, gli altri perforano la propria e si anastomizzano con quelli dello strato cutaneo.

Questa disposizione dei vasi si accorda mirabilmente con quella che viene descritta nella classe dei Mammiferi.

Prima di lasciare la descrizione della membrana timpanica nella *Rana esculenta* voglio riferire una varietà di essa. Per le presenti ricerche ho dovuto sezionare non poche membrane timpaniche, tra queste ne ho osser-

vata una che era duplice. L'apparenze di questa disposizione non posso dire come fossero sul fresco perchè non le avvertii quando posi a fissare il pezzo. Dalle sezioni risulta che esistono due cartilagini timpaniche strettamente unite e due membrane. Le due cartilagini di grandezza, prese insieme, quasi uguale a quella delle comuni cartilagini timpaniche, sboccano nella porzione mediale della cavità timpanica separatamente.

Rana temporaria.

La *Rana temporaria* presenta nelle parti laterali della testa ed in corrispondenza del cinto scapolare una macchia scura a forma di triangolo. In questo è bene manifesto il margine che limita la grande apertura della cartilagine timpanica il quale rilevando leggermente alla superficie della pelle apparisce come un circolo inscritto nel triangolo; entro a questo circolo è compresa la membrana del timpano la quale nella *Rana temporaria* non è come nella esculenta chiaramente visibile anche per il tono di colore, del resto presenta sempre, piccole, rare macchie o auree o biancastre. La membrana del timpano si trova a circa 2 millimetri dietro l' orbita, negli individui adulti ha un diametro dai 3 ai 4 millimetri.

Il risultato dell'esame istologico si accorda perfettamente con quello ottenuto nella *Rana esculenta.*

Bufo vulgaris.

Nel Bufo la membrana del timpano trovasi negli individui adulti a poco più di un mezzo centimetro al di dietro ed un po' al di sotto dell' angolo posteriore dell' occhio, è rappresentata da una superficie liscia di forma quasi circolare. È chiaramente manifesta perchè apparisce liscia in mezzo alle verruche che la circondano. Sulla membrana del timpano sono solamente 4 o 5 piccole verruche in prossimità della sua periferia, nella metà posteriore di questa. Nella metà inferiore della membrana del timpano il margine libero della cartilagine timpanica è bene rilevato, quivi il contorno della membrana timpanica è manifestissimo. Negli individui nei quali le verruche hanno sviluppo straordinario, sono proporzionatamente grandi anche quelle che ho affermato essere piccolissime alla periferia della membrana timpanica e celano in parte la superficie liscia che ho sopra de-

scritta, ma del resto questa è sempre bene visibile. La membrana timpanica presenta un diametro, negli individui adulti, di 5 millimetri.

Remossa la pelle, rimane in sito la membrana propria libera solo per piccolo tratto alla periferia, nel resto è strettamente unita all' estremo esterno del pezzo distale della columella, che ha forma di disco e che occupa quasi tutto lo spazio offerto dalla grande apertura della cartilagine timpanica.

Tolto il pezzo distale della columella e la propria, si penetra nella porzione laterate della cavità timpanica che è costituita fondamentalmente dalla cartilagine timpanica, del resto anche il processo inferiore del timpanico prende larga parte alla sua costituzione.

Il reperto istologico differisce un pò da quello trovato nelle Rane.

Lo strato Malpighiano si assottiglia pochissimo in corrispondenza della membrana timpanica.

Il derma diminuisce in spessore a misura si sale dalla periferia verso il centro, ma raggiunta la columella si mantiene su di questa basso in modo uniforme, non riacquista in spessore come nelle Rane.

La membrana propria molto sottile confondesi sulla superficie laterale della columella con il pericondrio, in vicinanza della periferia si fa libera.

Hyla arborea.

Nell' *Hyla arborea* una striscia di pelle scura si reca dalle parti laterali dell' addome, nelle parti laterali del cranio, fino all' orbita. A circa un millimetro dietro alla commissura labiale apparisce in parte dentro la striscia, in parte sotto questa, la membrana timpanica di colore un pò più scuro della pelle circonvicina, con il contorno ben rilevato, specialmente nella metà inferiore.

I risultati avuti dalle ricerche istologiche fatte sulla membrana del timpano dell' *Hyla arborea* sono identici a quelli avuti nelle Rane.

CONCLUSIONI.

La membrana del timpano nella *Rana esculenta*, nella *Rana temporaria*, nel *Bufo vulgaris*, nell'*Hyla arborea* è costituita da tre strati che sono: lo strato esterno (cutaneo), lo strato medio (fibro-muscolare), lo strato in-

terno (mucoso); si hanno cioè nella struttura della membrana timpanica disposizioni fondamentali omologhe a quelle che esistono nei vertebrati superiori.

Nelle Rane il modo di comportarsi dello strato cutaneo in corrispondenza della columella, i rapporti della membrana propria con la columella, hanno grandissima somiglianza con quelli che esistono nei Mammiferi fra strato cutaneo e manico del martello, fra membrana propria e manico del martello.

I vasi sanguigni della membrana timpanica hanno nelle Rane disposizione analoga a quella che riscontrasi nei Mammiferi.

RETTILI

Nell' ordine degli Ofidi ho studiato del 2° sotto-ordine il *Coluber viridiflavus* ed il *Tropidonotus natrix*, del 4° sotto-ordine la *Vipera aspis*. Dell' ordine dei Sauri esaminai nel 3° sotto-ordine il *Platydactylus muralis*, nel 4° sotto-ordine l'*Anguis fragilis* ed il *Seps chalcidica*, nel 5° sotto-ordine la *Lacerta muralis* e la *Lacerta viridis;* nell' ordine dei Cheloniani la *Cistudo europaea* e la *Testudo graeca*.

Sulla membrana timpanica dei Rettili furono fatte ricerche i risultati delle quali riassumo.

Geoffroy (1) afferma che nella *Vipera*, nel *Coluber viridiflavus* non esiste orecchio esterno, nè membrana timpanica, nè cassa timpanica. Ottenne i medesimi risultati anche in ricerche fatte su due grossi serpenti d' Asia, che appartenevano al medesimo genere del *Coluber viridiflavus*. Riguardo alla *Cecilia* afferma che non ha traccia d' orecchio esterno; che la pelle non si modifica in corrispondenza dell'orecchio medio; che esiste la membrana timpanica, posta sotto ai muscoli. Un piccolo osso muove dalla parte superiore e posteriore del margine della membrana timpanica e si avanza obliquamente e termina alla parte media di questa membrana sulla quale è appoggiato. *Geoffroy* fece la descrizione macroscopica della membrana timpanica in varie

(1) Loc. cit.

specie di Lucertole (non le nomina); ammise che la membrana di questi Rettili è costituita da due foglietti tra i quali trovasi quel piccolo osso che secondo lui sarebbe omologo al martello dei quadrupedi; dei foglietti l'esterno sottilissimo apparterrebbe alla pelle quivi molto assottigliata; l'interno sarebbe una continuazioue della membrana che riveste la cavità corrispondente alla cassa timpanica dei quadrupedi.

Bojanus (1) ricorda il disco cartilagino della columella nella Testuggine.

Comparetti (2) accenna ad alcune particolarità macroscopiche della membrana timpanica nella Lucertola; descrive la columella affermando che è poco diversa da quella degli Uccelli. Considera la membrana del timpano costituita da due lamine, una proveniente dalla cute, l'altra dal periostio della cavità timpanica. Riguardo alla membrana del timpano della Testuggine scrive che tolta la pelle in corrispondenza della cavità timpanica, si incontra un opercolo rotondo o quasi ovale; che sotto a questo trovasi una lamina lucente, sottilissima.

Scarpa (3) afferma che nei Serpenti non è membrana timpanica; che la columella non raggiunge la cute. Ammette nell'*Anguis fragilis* la membrana del timpano che risiederebbe sotto alla pelle, al tessuto sotto-cutaneo, alla sostanza fibrosa; l'ossetto dell'udito aderirebbe fortemente alla membrana timpanica. Asserisce che nella Testuggine marina, sotto alla pelle del capo, poco sopra all'articolazione della mandibola è la membrana timpanica di natura cartilaginea; la faccia esterna di essa sarebbe ricoperta da tessuto connettivo lasso, la interna rivestita dal periostio della cavità timpanica.

Windischmann (4) ammette che nel Coccodrillo, nella Testuggine, nelle Lucertole (*Lacerta ocellata, Scincus officinalis, Gekus mauritanus*) la membrana del timpano sia costituita da tre lamine, l'esterna (epidermica), la media o *propria* ed una interna proveniente dalla mucosa che riveste la cavità timpanica. *Windischmann* fa queste affermazioni senza entrare minimamente nella descrizione dei particolari istologici.

Moldenhauer (5) studiò la membrana del timpano in alcuni Rettili con

(1) Bojanus A. *Anatome testudinis Europae.* Vilnae, 1819.
(2) Loc. cit.
(3) Loc. cit.
(4) Loc. cit.
(5) Loc. cit.

molta accuratezza, scelse il materiale di studio tra i Sauri ed i Cheloni, dei primi studiò la *Lacerta stirpium* e la *Lacerta muralis*, dei secondi l'*Emys europaea* e la *Testudo graeca*. Riferisco succintamente i risultati ai quali giunse *Moldenhauer*. Ammette che nelle Lucertole da esso esaminate la membrana del timpano risulti dei soliti tre strati e ne prese in considerazione la struttura; descrive i rapporti della membrana timpanica con la columella. Nei Cheloni esaminò lo strato esterno, il disco cartilagineo, il connettivo che unisce questo disco alla pelle ed in fine lo strato interno della membrana timpanica. *Moldenhauer* si perde nella descrizione minuta di molte particolarità, ma non segue la via diritta nella interpretazione morfologica comparativa; nei Cheloni non ricorda affatto la membrana propria quasi che questi Rettili dovessero nella struttura della membrana timpanica differire fondamentalmente dagli Anfibii e dagli altri Rettili, il che non è. Nello esporre i risultati delle mie ricerche avrò occasione di ricordare le particolarità descrittive esposte da *Moldenhauer*.

OFIDI

Geoffroy affermò per il primo che nella *Vipera*, nel *Coluber viridiflavus* ed in altri Serpenti non è membrana del timpano, nè orecchio medio.

Scarpa ammise che nei Serpenti non è membrana del timpano e che la columella non giunge alla pelle.

Milne Edwards (1) scrisse che in corrispondenza dell'orecchio la pelle non si modifica nei Serpenti.

Siccome in questo Paese il *Coluber viridiflavus*, il *Tropidonotus nastrix*, la *Vipera aspis* costituiscono un materiale di studio abbondante, volli controllare con la dissezione e con la indagine microscopica le affermazioni di *Geoffroy*, di *Scarpa* e di *Milne Edwards*.

Coluber viridiflavus.

Nella parte laterale della testa nessun'accenno a meato auditivo esterno, nessun' accenno a membrana timpanica. Sollevata la pelle nella parte

(1) H. Milne Edwards. *Leçons sur la Physiologie et l'Anatomie comparée de l'homme et des animaux*. Paris, 1876.

laterale della testa ed osservata attentamente non presenta assottigliamenti; i muscoli coprono lo squamoso ed il quadrato.

La columella nella sua estremità interna mostra un'espansione che si adatta perfettamente alla finestra ovale, la sua estremità esterna arrotondata si unisce al margine posteriore del quadrato che presenta per riceverla, una fossetta ovalare. La columella dalla finestra ovale si reca indietro ed allo esterno, leggermente obliqua; decorre prima subito sotto al margine inferiore dello squamoso, poi sotto al quadrato del quale raggiunge il margine posteriore e con esso si comporta nel modo sopra descritto. La columella nel *Coluber viridiflavus* è lunga, negli individui adulti, poco più di ½ centimetro, è ossea per circa tutta la sua metà interna, nel resto è cartilaginea.

Osservando microscopicamente il rapporto della columella con il quadrato, si vede che essa poggia direttamente su questo osso in corrispondenza della fossetta ovalare sopra ricordata, ai margini della fossetta il pericondrio della columella ed il periostio del quadrato si fondono insieme.

Tropidonotus natrix.

Nel *Tropidonotus natrix* ho avuto risultati identici a quelli ottenuti nel *Coluber viridiflavus*.

Vipera aspis.

Nella *Vipera aspis* la columella è un po' più corta che nei Rettili sopra descritti e si trova a maggiore distanza dallo squamoso, il quale nella Vipera è molto ridotto.

Nel *Coluber viridiflavus*, nel *Tropidonotus natrix*, nella *Vipera aspis* non trovasi adunque membrana timpanica, l'unico rappresentante dell'orecchio medio è la columella; non si modifica la pelle in corrispondenza dell' organo dell' udito; esiste bene sviluppata la columella.

SAURI

Geko (Platydactylus muralis).

Al di sopra dello estremo posteriore della mandibola è nel Geko l'apertura del condotto auditivo esterno di forma ovoidale, con il grande diametro diretto dal basso all'alto, dall'avanti all'indietro.

Tolte le parti molli che circondano il meato auditivo esterno si scorge in fondo a questo la membrana timpanica ovoidale, convessa nella superficie esterna, con il grande diametro che negli individui più grossi misura circa 4 millimetri, parallelo al grande asse dell'apertura del condotto auditivo esterno.

La columella è bene manifesta, decorre dall'alto lungo il grande asse della membrana e di questo raggiunge circa la metà.

Preparando in modo conveniente le parti dure e le parti molli che costituiscono il meato auditivo esterno, si vede che la periferia della membrana timpanica si attacca con la sua metà anteriore alla faccia interna del quadrato tra il limite del 3° interno col 3° medio, il 4° inferiore della metà posteriore è in rapporto con quella porzione della mandibola che si trova al di dietro della articolazione quadrato-mandibolare, il resto della metà posteriore si mette in rapporto con l'estremo distale del primo arco joideo e con le parti molli che trovansi situate fra l'estremo posteriore della mandibola e l'estremo esterno dello squamoso. Il tratto che intercede fra questi due ossi è occupato quasi per intiero dalla estremità superiore, a forma di spatola, del primo arco joideo, la quale si mette in intimo rapporto con la periferia della membrana timpanica e la oltrepassa per brevissimo tratto recandosi così verso il meato auditivo esterno.

Dal rapporto della membrana timpanica con la faccia interna del quadrato risulta che questo osso con poco spazio concorre a formare il primo rudimento dell'orecchio medio e si ha invece per il meato auditivo esterno in alto ed in avanti una volta ossea costituita dal tratto di faccia concava del quadrato, posta allo esterno della membrana timpanica.

Espongo ora il risultato delle indagini microscopiche. La periferia della membrana timpanica che negli Anuri si unisce per tutta la sua estensione con la cartilagine timpanica, nei Cheloni è in intimo rapporto con il quadrato, negli Uccelli con il quadrato, con l'occipitale laterale e con il basi-occipitale, nei Mammiferi con il timpanico, si unisce nei Sauri anche a parti molli; siamo quindi nei Sauri in presenza di una disposizione tutt'affatto speciale che merita di essere studiata allo scopo di non perdere la via retta che dagli Anfibii, per successive trasformazioni, deve condurci alla membrana timpanica dell'uomo.

Alla ricerca microscopica la membrana del timpano apparisce nel Geko composta dei soliti strati. Seguendo il metodo adottato per la descrizione della membrana timpanica negli Anfibii, incomincio ad esporre la struttura dello strato cutaneo.

Dalla superficie esterna delle membrane fissate ed indurite è facile togliere uno straterello che è tanto sottile da potersene fare preparati *in toto*. Questo straterello apparisce costituito da cellule cornee, trattato con soluzione acquosa di potassa caustica al 10 %, le cellule si mostrano poligonali unite le une alle altre da poca sostanza cementante, sulla loro superficie esterna presentano cortissime produzioni piliformi. Colorita con ematossilina la membranella sottilissima che resta attaccata al quadrato ed alle parti molli dopo tolto lo straterello sopra descritto, si incontrano esaminando dallo esterno verso l' interno, nuclei di uno strato di cellule epiteliali e rade cellule pigmentate, le une e le altre appartengono allo strato esterno. Nelle sezioni si vede che prendono parte a costituire questo strato scarse e delicate fibre di connettivo, appartenenti al derma; quindi lo strato cutaneo della membrana timpanica è costituito nel Geko dagli elementi della cute profondamente modificati.

La membrana propria è composta di sottili fibre connettive a direzione raggiata che sono rafforzate da fibre della stessa natura disposte in fascetti i quali partono dallo estremo libero dei tre rami della columella e si perdono nella membrana propria (Fig. 6). Dal ramo mediano che è il più lungo partono poche fibre le quali discendono verso l' apice della membrana. Dal ramo anteriore che è breve e robusto partono due fascetti; il superiore recasi in alto, l'inferiore si spinge in basso decorrendo parallelamente alla periferia della membrana timpanica e le sue fibre vanno a perdersi in prossimità dell'estremo inferiore della membrana timpanica. Un altro fascio di fibre connettive si parte dal ramo posteriore brevissimo della columella e questo fascio recandosi in basso parallelamente alla periferia della membrana timpanica si perde un po' prima dello estremo inferiore di questa. Nella membrana propria sono cellule fisse del connettivo i nuclei delle quali si vedono tra le fibre.

La periferia della membrana propria in corrispondenza delle parti molli si confonde con il derma, con le aponevrosi limitrofe, con la mucosa della

cavità timpanica. In corrispondenza dell'estremo distale del primo arco joideo la periferia della membrana propria si confonde con il pericondrio di questo estremo distale.

Nei preparati della membranella che resta attaccata al quadrato ed alle parti molli dopo tolto lo strato esterno, colorita alla ematossilina, oltre i nuclei delle cellule fisse, si vedono in un piano più profondo i nuclei dell'epitelio che riveste la superficie interna della membrana propria, epitelio che costituisce insieme a pochi fasci di fibre connettive lo strato interno della membrana timpanica, strato il quale proviene dalla mucosa che tappezza il resto della cavità timpanica; l'epitelio è pavimentoso semplice.

Anguis fragilis.

Geoffroy affermò che nell'*Anguis fragilis* la membrana del timpano è posta sotto ai muscoli. *Scarpa* ammise che la membrana timpanica di questo rettile risieda sotto alla pelle, al tessuto sottocutaneo, alla sostanza fibrosa; che l'ossetto dell'udito aderisca fortemente alla membrana timpanica. Si legge in *Claus* (1) che la membrana del timpano nell'*Anguis fragilis* trovasi sotto la pelle.

L'*Anguis fragilis* presenta riguardo all'orecchio medio una disposizione che merita di essere studiata con grande diligenza specialmente nelle particolarità istologiche.

Osservando la cavità faringea al di dietro dell'estremo posteriore della mandibola, vedesi che un diverticolo faringeo si spinge verso la parte laterale e posteriore della testa e che a misura si innalza, si ristringe; però nella sua parte terminale torna a dilatarsi. Il cul di sacco di questo diverticolo è ricoperto dalla pelle che non si modifica in corrispondenza di esso e dai muscoli. Tolta la pelle ed i muscoli, osservando dal diverticolo attraverso allo estremo superiore di questo, si vede che sulla mucosa poggia la columella decorrente dall'alto al basso e leggermente dall'innanzi all'indietro, la porzione di columella che si mette in rapporto con la mucosa dell'orecchio medio è lunga circa mezzo millimetro.

Più interessante è la indagine istologica. I ricercatori che studiarono

(1) Claus C. *Traité de Zoologie traduit de l'allemand par* G. Moquin-Tandon. Paris, 1884.

l'orecchio medio della *Anguis fragilis* hanno unanimemente affermato esistere in questo rettile la membrana timpanica, quindi si avrebbe una membrana timpanica deficiente, per lo meno dello strato cutaneo perchè tra la mucosa che riveste l'orecchio medio e la pelle intercedono muscoli.

Fatte del diverticolo sezioni trasverse in serie, comincianti dal principio di esso nella cavità faringea, si vede che il diverticolo da prima è slargato con forma molto irregolare, si adatta alle anfrattuosità offertele dai muscoli e dalle ossa; a misura che si innalza si restringe leggermente e giunto in prossimità della sua fine presenta quella dilatazione che ho già ricordata e che rappresenta l'orecchio medio.

La columella nel recarsi entro alla cavità timpanica spinge innanzi a sè la mucosa (Fig. 7) la quale ad essa si applica come fa la mucosa della cavità timpanica negli Anfibii e nel Geko.

Da queste ricerche risulta che nella *Anguis fragilis* è tuba Eustachiana, orecchio medio rudimentario, membrana del timpano no, ma un primo accenno ad essa.

Seps chalcidica.

In questo rettile che appartiene al 4.° sotto-ordine insieme all' *Anguis fragilis* si hanno riguardo all'orecchio medio disposizioni ben diverse. Esiste orecchio medio il quale allo esterno è chiuso dalla membrana timpanica, esiste anche il meato auditivo esterno. La membrana del timpano per i rapporti e per la struttura si accorda perfettamente con quelli della *Lacerta muralis*.

Lacerta muralis.

La membrana del timpano nella *Lacerta muralis* è situata all'estremo posteriore della porzione laterale della testa; tolte le parti molli circonvicine si vede che la membrana timpanica è situata al di dietro dell'articolazione quadrato-mandibolare, al di sopra della estremità posteriore della mandibola. La membrana timpanica è di forma ovalare, è scura, lucente, convessa esternamente, nella parte superiore e posteriore di essa si scorge sotto forma di piccolo stelo, lungo circa un millimetro, decorrente dall'alto al basso, dall'indietro all'innanzi verso il centro della membrana timpanica, il pezzo

distale della columella. Il grande diametro della membrana è diretto dal basso all'alto ed è leggermente obliquo dall'innanzi all'indietro, misura 4 millimetri negli individui adulti più grossi, il piccolo diametro ne misura quasi 2. La membrana non si trova alla superficie della testa ma in un leggero affondamento, primo indizio di meato auditivo esterno.

I rapporti della periferia della membrana timpanica sono identici a quelli descritti nel Geko, solo esiste una differenza per ciò che riguarda la inserzione di questa periferia al quadrato. La periferia della membrana timpanica nella sua parte superiore ed anteriore prende attacco alla faccia interna del quadrato in prossimità del margine esterno di quest'osso. Dal rapporto della membrana timpanica con la faccia interna del quadrato risulta che in questo rettile lo spazio destinato a costituire l'orecchio medio è più esteso di quello che ho descritto nel Geko.

La membrana del timpano nella *Lacerta muralis* risulta dei soliti tre strati. La struttura di questi differisce leggermente da quella descritta nel Geko, solo per lo strato esterno. Questo nei pezzi induriti può separarsi dalla membrana propria; colorito con ematossilina *(Delafield)* mostra dallo esterno allo interno prima uno strato di cellule cornee senza le produzioni piliformi osservate nel Geko, poi uno strato di cellule poligonali molli, poi uno strato di cellule pigmentarie e finalmente pochi fasci delicati di connettivo che si incrociano tra loro in vario senso producendo una rete a larghe maglie. Questo strato non è altro che una profonda modificazione della pelle.

L'estremo distale del primo arco joideo non raggiunge la periferia della membrana timpanica, quindi abbiamo in questo sauro una estensione maggiore di periferia della membrana timpanica in contatto con parti molli. *Moldenhauer* studiò i rapporti in questa porzione di membrana timpanica; trovò che la membrana propria seguita col derma e con la mucosa della cavità timpanica, ma devesi aggiungere che la propria si confonde anche con le aponevrosi, come avviene nel Geko.

Lacerta viridis.

Tanto la ricerca macroscopica che la microscopica non ci rivela in questa Lucertola nulla di vario da quanto abbiamo osservato nella *Lacerta muralis*.

CHELONI

Tartaruga acquatica (Cistudo europaea).

Nella Tartaruga acquatica la membrana del timpano risiede sulle parti laterali della testa, subito al di sopra della articolazione quadrato-maxillare, è alla superficie della pelle, ha forma quasi sferica, i suoi diametri non oltrepassano negli individui adulti gli 8 millimetri, nella sua faccia esterna, vicino alla periferia, esistono alcuni solchi concentrici, quelli più esterni limitano la membrana del timpano.

Sollevata la pelle, questa non apparisce alla osservazione macroscopica assottigliata in corrispondenza della membrana del timpano.

Sotto la pelle che presenta una certa resistenza ad essere tolta rimane un leggero strato di sostanza connettiva che rappresenta la membrana propria; tolta anche questa, apparisce una lamina solida splendente che occupa quasi tutta la superficie di quello spazio che nell'osso quadrato dà ricetto alla membrana del timpano, lascia libero soltanto un breve tratto tutto intorno alla periferia. Questa lamina ha il nome di *disco cartilagineo,* è l'estremo esterno del pezzo distale della columella, il suo diametro raggiunge i 5 millimetri.

Al di sotto del disco, con una dissezione delicata, specialmente se questa viene eseguita in pezzi che hanno già subito l'indurimento, si incontra una membrana sottilissima la quale se viene ridotta in lacerti e questi vengono tirati, si vede che seguitano con la mucosa della cavità timpanica.

La faccia interna della membrana timpanica mostra un po' sotto al centro del disco cartilagineo, uno stelo sottile che decorre dall'avanti all'indietro verso il secondo pezzo della columella.

La membrana del timpano, l'ho già detto, prende attacco sull'osso quadrato. Quest'osso voluminoso, immobile, posto nella parte posteriore della porzione laterale del cranio al davanti dell'occipitale esterno e dello squamoso, allo esterno del proötico, presenta per accogliere la membrana timpanica un'apertura di forma rotondeggiante.

La cornice che offre il quadrato alla membrana del timpano non è completa, posteriormente in basso è per breve tratto interrotta da una

incisura che viene colmata da fasci fibrosi i quali si recano da un lato all'altro dell'osso; subito al di dentro della parte più profonda della incisura, passa la columella in un forellino speciale per recarsi verso il prootico.

Lo squamoso con la sua parte anteriore ed esterna raggiunge il margine della apertura che il quadrato offre alla membrana del timpano, la membrana del timpano si mette in rapporto anche con questa porzione dello squamoso.

Passo a riferire i risultati avuti dalla ricerca istologica. La membrana del timpano della Tartaruga acquatica risulta al solito di tre strati, dello esterno, del medio, dell'interno.

La pelle che prende parte alla costituzione della membrana timpanica (Fig. 8, 9) subisce modificazioni lievi, tali modificazioni può dirsi che si riferiscono esclusivamente al derma. Questo ai primi tagli si mostra leggermente assottigliato e l'assottigliamento continua grado a grado fino in corrispondenza della columella. Giunto il derma sulla faccia esterna della columella si mantiene sottile come abbiamo veduto accadere nel Rospo.

Ma bene distinta è fino dai primi tagli la membrana propria (Fig. 8, 9) la quale risulta di fasci compatti di tessuto fibroso che si incrociano strettamente fra loro, quelli a direzione raggiata sono però in maggiore quantità; è libera solo per piccolo tratto in vicinanza della sua periferia, nel resto è in rapporto con la superfice laterale del disco cartilagineo della columella. Ai primi tagli trasversi della membrana timpanica, incominciando a sezionare dall'alto, si vede la parte libera della propria la quale sorge dal periostio del quadrato (Fig. 8). La membrana propria raggiunto il disco cartilagineo si assottiglia, poggia sulla faccia esterna del disco confondendosi con il pericondrio (Fig. 9).

Lo strato interno è assai spesso; nei pezzi induriti si isola facilmente dalla membrana propria e si presta bene ad essere esaminato in superficie. Questo strato è costituito da una mucosa rivestita da epitelio pavimentoso semplice; i fascetti di connettivo del derma sono rafforzati da tratti dello stesso tessuto disposti come quelli che *J. Gruber* descrisse nella membrana propria dell'uomo con il nome di *formazioni dendritiche*. Questi tratti fibrosi dello strato interno, nella membrana timpanica della Tartaruga furono osservati la prima volta da *Moldenhauer*. Nello strato interno si trovano in abbondanza vasi, provenienti dalla mucosa della cavità timpanica.

Testudo graeca.

Il reperto macroscopico e microscopico si accordano perfettamente con quello ottenuto nella *Cistudo europaea.*

CONCLUSIONI.

Dalle mie ricerche concludo che nell'ordine degli Ofidi nel *Coluber viridiflavus*, nel *Tropidonotus natrix*, nella *Vipera aspis* non è membrana timpanica, nè orecchio esterno, nè tuba Eustachiana; che unico rappresentante dell'orecchio medio esiste la columella; che nell'ordine dei Sauri nel *Platydactilus muralis*, nella *Seps chalcidica*, nella *Lacerta muralis*, nella *Lacerta viridis* è membrana timpanica, meato auditivo esterno, orecchio medio, tuba Eustachiana; che l'*Anguis fragilis* non ha membrana timpanica, nè orecchio esterno, possiede l'orecchio medio e la tuba Eustachiana: che nella *Cistudo europaea* e nella *Testudo graeca* esiste membrana timpanica, manca l'orecchio esterno, esiste benissimo sviluppato l'orecchio medio, esiste la tuba Eustachiana; che nei Rettili la membrana del timpano risulta di tre strati dei quali l'esterno e l'interno sono di natura mucosa, il medio di natura connettiva; che nei Sauri, fascetti di fibre connettive provenienti dai rami della columella rafforzano la propria; che nei Sauri la periferia della membrana timpanica è in rapporto con il quadrato, con la mandibola, con parti molli, nel Geko è in rapporto anche con l'apparecchio joideo; che nei Cheloni la periferia della membrana del timpano è in rapporto con il quadrato.

UCCELLI

Comparetti e *Moldenhauer* descrissero alcune particolarità macroscopiche della membrana timpanica negli Uccelli; *Breschet* (1) afferma che è costituita da due strati dei quali l'esterno proviene dalla pelle del condotto auditivo esterno. *Moldenhauer* studiò la membrana del timpano degli Uccelli anche istologicamente, ma in modo da lasciare agio a nuove indagini.

(1) Breschet G. *Recherches anatomiques et physiologiques sur l'Organe de l'audition chez les Oiseaux.* Paris, 1836.

Pollo.

Nella classe degli Uccelli ho scelto come materiale di studio il Pollo.

La membrana del timpano ha nel Pollo forma ovoidale con il grande diametro diretto dal basso all'alto e leggermente dallo innanzi allo indietro, il grande diametro misura 8 millimetri, il piccolo circa 4 millimetri. La membrana del timpano è convessa esternamente, sulla sua faccia esterna si scorge il ramo anteriore della columella, che si reca dallo indietro allo innanzi e decorre trasversalmente poco sopra al piccolo asse della membrana timpanica. Dalla estremità libera del ramo anteriore della columella parte un cordoncino biancastro, lucente che si reca in basso e leggermente in avanti verso la periferia della membrana timpanica e si fissa ad un piccolo rilievo di forma conica che ha la punta rivolta verso la membrana del timpano.

La periferia della membrana timpanica si attacca sul quadrato, sull'occipitale laterale, e sul basi-occipitale.

La struttura dello strato cutaneo è fondamentalmente la stessa di quella descritta negli Anfibii e nei Rettili, si ha allo esterno uno strato di cellule epiteliali corneificate, poi uno strato di cellule epiteliali molli e finalmente delicati fascetti di connettivo provenienti dal derma.

Lo strato interno viene dalla mucosa dell'orecchio medio, quivi molto assottigliata e munita di epitelio pavimentoso semplice.

Formano lo strato medio della membrana timpanica fibre connettive che a direzione raggiata si recano dalla periferia verso la columella, si anastomizzano tra loro producendo un reticolato a maglie strette e lunghe, in vicinanza della columella si fanno più fitte e più grosse (Fig. 10). Sotto a queste fibre ne sono altre, egualmente connettive, poste di traverso sulle raggiate, corrispondono alle circolari dei Mammiferi.

Oltre queste, sono nella membrana propria altre fibre connettive raccolte in fascetti come le abbiamo trovate nei Rettili; nel Pollo partono questi fascetti, come nei Rettili, dall'apice dei rami della columella, ma uno abbastanza cospicuo nasce dalla periferia della membrana timpanica, nella parte sua anteriore (Fig. 10).

Dall'apice del ramo anteriore della columella parte quel prolungamento

(Fig. 10) che ho già descritto macroscopicamente; è composto da fibrille connettive che hanno l'apparenza di quelle dei tendini; *Moldenhauer* chiama a ragione questo fascio *striscia tendinea*. Il rilievo sul quale termina la striscia tendinea ha la medesima struttura di questa, ma quivi i fasci di connettivo sono più strettamente uniti, tantochè nei preparati *in toto* questa porzione della striscia tendinea non è trasparente e bisogna mettere in evidenza questi fasci con la dilacerazione. Anche il ramo inferiore ed il superiore della columella, irradiano fibre come è dimostrato nella Fig. 10.

Nella parte anteriore della membrana del timpano sorge dalla periferia un cordoncino di tessuto connettivo fibroso a fasci strettamente uniti, il quale dopo breve decorso si risolve in fibre che si irradiano a ventaglio sulla membrana propria (Fig. 10), questa disposizione in grossi Uccelli, ad esempio nel Tacchino, è più chiaramente manifesta. La porzione periferica di questo fascio è analoga a quella periferica della striscia tendinea, quindi si dovrebbe ammettere che anche le fibre della striscia tendinea prendono origine alla periferia; ma in senso assoluto non può accogliersi questo modo di vedere; prima perchè in corrispondenza della columella le fibre sono in molto maggiore quantità che allo estremo opposto della striscia tendinea, poi perchè dall'apice dei rami della columella partono fibre che alla loro origine sono confuse con il pericondrio della columella. Nella striscia tendinea devono certamente esservi numerose fibre che provengono dalla periferia come ciò chiaramente si vede avvenire per il fascio di rinforzo anteriore ed insieme a queste devono mescolarsi in prossimità del ramo anteriore della columella fibre provenienti da questo.

Tutti i fasci di rinforzo sono situati al di dietro delle fibre raggiate.

Tra le fibre raggiate della membrana propria si scorgono numerosi nuclei delle cellule fisse del connettivo.

Tra molte membrane di Pollo che ho esaminate, solo in due vidi *formazioni dendritiche* manifestissime.

CONCLUSIONI.

La membrana timpanica del Pollo come quella degli Anfibii e dei Rettili è costituita da tre strati che sono il cutaneo, il fibroso, il mucoso.

Nella membrana del Pollo sono fibre connettive di rinforzo riunite in fascetti come nei Rettili.

La periferia della membrana timpanica è in rapporto con il quadrato, con l'occipitale laterale, con il basi-occipitale.

MAMMIFERI

Ricerche accuratissime furono fatte nella membrana timpanica dell'uomo, per gli altri Mammiferi non esistono lavori speciali; di questa classe nell'ordine degli Artiodattili ho studiato la membrana timpanica della Pecora; nell'ordine dei Roditori quella del Coniglio, della Cavia, del Ghiro; nell'ordine degli Insettivori quella del Musoragno; nell'ordine dei Carnivori quella del Cane; nell'ordine dei Chirotteri quella del Pipistrello ferrodicavallo; finalmente ho fatto ricerche sulla membrana timpanica umana prendendo in esame quelle particolarità intorno alle quali regna anche oggidì controversia.

ARTIODATTILI

Pecora.

Nelle presenti ricerche ho preso come base fondamentale della indagine membrane timpaniche tanto sottili da potere essere studiate istologicamente in superficie in tutte le loro particolarità. Non è tra queste certamente la membrana timpanica della Pecora che descrivo innanzi a quella degli altri Mammiferi da me studiati solo per tenere di questa classe l'ordine filogenetico.

Colorando la membrana timpanica della Pecora con pricrocarminio, trovai che oltre le cellule fisse del connettivo conosciute con il nome di corpuscoli di *Tröltsch* sono altre cellule fisse poste sulla faccia esterna della membrana propria. Ho trovato cellule analoghe a queste, più chiaramente manifeste che nella Pecora, nella Cavia; quando descriverò la membrana timpanica di questo mammifero, tali cellule saranno considerate in tutte le loro particolarità.

Nella membrana timpanica della Pecora merita di essere preso in considerazione lo strato cutaneo. Questo risulta della epidermide e del derma. Le papille dermiche del condotto auditivo esterno vicino alla periferia della

membrana timpanica spariscono (Fig. 11), raggiunto che ha il derma questa periferia, riappariscono le papille, molto basse del resto, che poggiano con la loro base sulla faccia esterna della membrana propria; queste papille abbassandosi a misura si spingono verso il centro della membrana timpanica vanno a sparire, ma intanto per un certo tratto (Fig. 11) lo strato cutaneo conserva le papille sulla membrana timpanica, disposizione che non si ha nell'uomo, nè trovo ricordata per altri Mammiferi. Insieme con le papille si assottiglia l'epidermide che al punto ove le papille spariscono è molto ridotta in spessore.

Se con la membrana timpanica della Pecora si fanno preparati istologici in superficie, si osserva intorno alla periferia della membrana timpanica uno strato spesso che impedisce la trasparenza, questo inspessimento della membrana timpanica devesi alla presenza della epidermide quivi assai alta, alla presenza delle papille ed anche delle fibre circolari molto abbondanti (Fig 11).

RODITORI

Nell'ordine dei Roditori si trovano membrane timpaniche di una sottigliezza tale che si prestano bene ad essere esaminate in superficie. Tra i Roditori ho prescelto la Cavia perchè oltre ad avere una membrana tanto sottile da potere essere esaminata *in toto*, costituisce materiale di studio facilissimo a trovarsi ed allo stato quasi sempre sano, e questo non può dirsi del Coniglio.

Nella Cavia farò descrizione particolareggiata degli strati della membrana timpanica perchè da questa descrizione voglio trarre argomento per interpretrare disposizioni che esistono nell'uomo. Del resto per illustrare alcune particolarità della membrana timpanica umana, mi varrò anche di ricerche fatte in altri Mammiferi.

Cavia.

Lo strato esterno della membrana timpanica è molto sottile, risulta da epitelio pavimentoso stratificato che fa seguito al corpo mucoso di Malpighi e da uno strato sottilissimo di tessuto connettivo proveniente dal derma.

Lo strato medio è costituito da fibre connettive a direzione raggiata *(fibre raggiate)* e da fibre a direzione circolare *(fibre circolari)* (Fig. 12, 13).

Le prime sono strettamente unite le une alle altre, si anastomizzano e lasciano tra loro spazii occupati da cellule fisse del connettivo analoghe ai corpuscoli descritti da *Tröltsch* nell'uomo. Le fibre circolari decorrono parallele alla periferia della membrana timpanica, si anastomizzano fra loro e costituiscono una rete a larghe maglie per dimensioni e per forma svariate; queste fibre sono più fitte e più grosse in vicinanza dell'anello fibrocartilagineo, si spingono assottigliandosi lievemente e gradatamente fino in vicinanza del manico del martello, soltanto qualcuna raggiunge la faccia esterna di questo. Le fibre circolari sono più rigide di quelle raggiate; hanno alcune caratteristiche delle fibre elastiche, resistono all'azione della potassa caustica al 10 per cento ed all'azione dell'acido acetico, mentre quelle raggiate con questi reagenti, col tempo leggermente si alterano.

Nello strato medio non sono *formazioni dendritiche,* ho voluto fare a questo proposito estese ricerche perchè essendosi attribuito da taluno molto valore a tali formazioni, il non averle trovate nella Cavia è fatto importante.

Tra le fibre raggiate, negli spazii sopra ricordati stanno cellule fisse del connettivo analoghe ai corpuscoli di *Tröltsch,* le quali in vicinanza del manico del martello sono accolte in capsule cartilaginee (Fig. 14) e queste corrispondono a quelle cellule della *formazione cartilaginea* le quali *Gruber* con esposizione un po' intrigata afferma che trovansi fra i fasci della membrana propria. Ma *Gruber* descrisse anche nel manico del martello là ove su questo si attacca la membrana propria cellule cartilaginee le quali non debbonsi considerare come fa *Gruber* una formazione speciale, sibbene come osserva *Politzer* (1) un residuo della cartilagine embrionale del martello. Il nome di formazione cartilaginea mi pare debba piuttosto riserbarsi a quel tessuto cartilagineo che si trova sulla membrana propria in prossimità del manico del martello.

Ranvier (2) afferma che " i tendini ed i ligamenti in vicinanza della inserzione all'osso od alla cartilagine presentano tra le fibre non cellule libere come quelle che si trovano nel resto della loro estensione, ma cellule rac-

(1) Politzer A. *Die anatomische und histologische Zergliederung des menschlichen Gehörorgans.* Stuttgart, 1889.
(2) Ranvier L. *Traité tecnique d' Histologie.* Paris, 1875.

chiuse in capsule cartilaginee „. In questa legge rientra anche la membrana propria sia per la sua struttura, sia per il modo di comportarsi con il manico del martello e con l'osso timpanico; troveremo di fatti anche sull'anello fibro-cartilagineo in prossimità dell'osso, cellule cartilaginee.

Nello strato medio, con il metodo di impregnazione metallica consigliato da *Tartuferi* (1) oltre alle cellule fisse del connettivo che corrispondono ai corpuscoli di *Tröltsch* ho messe in evidenza altre cellule fisse che poggiano sulla faccia esterna di questo strato (Fig. 15, 16) munite di numerosi prolungamenti i quali si anastomizzano tra loro (Fig. 16). Queste cellule sono disposte trasversalmente sulle fibre raggiate.

Colorando membrane del timpano della Cavia con ematossilina *(Delafield)*, oltre ai nuclei delle cellule fisse posti nelle lacune che trovansi tra fibra e fibra si scorgono altri nuclei situati appunto trasversalmente sulle fibre raggiate, questi appartengono alle cellule fisse che ora ho descritte.

Alla periferia dello strato medio è bene distinto l'anello fibro-cartilagineo (Fig, 13). Gli anatomici hanno molto discusso sulla struttura di esso, nè si può affermare che tale questione è risoluta; necessita quindi che questa parte della membrana propria sia presa in particolare considerazione.

L'anello fibro-cartilagineo della Cavia ha una struttura molto semplice, si presta quindi assai bene per essere studiato e può per questa ragione riuscire utile a farci interpretrare la struttura dell'anello fibro-cartilagineo di quei Mammiferi nei quali è molto complicata. Ho già detto che alla periferia della membrana timpanica le fibre circolari sono più grosse e più compatte; queste in corrispondenza dell'anello fibro-cartilagineo si mostrano ancora più compatte e leggermente più grosse; le fibre raggiate hanno il loro andamento caratteristico fino dalla periferia esterna dell'anello fibro-cartilagineo, si recano verso il centro della membrana incrociandosi e confondendosi con quelle circolari (Fig. 13). Le fibre raggiate sono in contatto con lo strato cutaneo, le circolari con il mucoso.

Nell'anello fibro-cartilagineo trovansi disseminate numerose cellule cartilaginee (Fig. 13); questo anello ha quindi la struttura della fibro-cartilagine, perciò abbandonai le denominazioni di *anello tendineo,* di *anello fibroso,*

---

(1) TARTUFERI F. *Nouvelle imprégnation métallique de la cornée.* (Anatomischer Anzeiger 1890, No. 18).

di *anello cartilagineo* per rimettere in onore la vecchia, giustissima denominazione di *anello fibro-cartilagineo*, usata da *Huschke*.

Lo strato esterno e l'interno della membrana timpanica coprono l'anello fibro-cartilagineo e devesi nei preparati in superficie togliere almeno lo strato cutaneo per osservare bene le particolarità sopra descritte.

Lo strato interno è costituito da un solo strato di cellule pavimentose e da pochi fasci di fibre connettive provenienti dalla mucosa dell'orecchio medio.

Coniglio.

Nel Coniglio esistono disposizioni analoghe a quelle che ho descritte nella Cavia.

Moscardino (Myoxus avellanarius).

Di tutti i Mammiferi presi in esame quello nel quale ho trovato l'anello fibro-cartilagineo con la maggiore quantità di cellule cartilaginee fu il *Myoxus avellanarius*. L'anello fibro-cartilagineo di questo roditore è riportato alla Fig. 17.

INSETTIVORI

Musoragno (Sorex vulgaris).

Nell'ordine degli Insettivori avrei voluto prendere in esame la *Talpa* per osservare se veramente esiste nella sua membrana timpanica il forame di *Rivinio*, come afferma *Fleischmann* (1), ma non ho pututo avere esemplari di *Talpa;* ho avuto invece dell'ordine degli Insettivori molti esemplari di *Sorex vulgaris*.

Della membrana del *Sorex* ho fatte sezioni in serie, nulla presenta di speciale nel suo strato esterno e nello interno; degna di essere descritta è la disposizione offerta dall'anello fibro-cartilagineo. Questo nella sua metà esterna è costituito da fascetti di connettivo che sorgono dal solco timpanico e si recano con direzione raggiata (Fig. 18) verso l'altra metà dell'anello fibro-cartilagineo ove convergono; quivi si raccolgono compatti e poi passano a costituire la membrana propria. I fascetti connettivi che irradiano dal solco

(1) Fleischmann. (Berlin. med. Zeitung, 1836).

timpanico, da questo solco fino alla porzione interna dell'anello fibro-cartilagineo ove si riuniscono, presentano tra di loro piccole lacune che sono occupate da vasi sanguigni.

Draispul (1) in un recente lavoro sullo sviluppo della membrana propria ha concluso che questa deriva dal periostio dell'anello timpanico. Se nei Mammiferi si osserva il rapporto dei fasci della membrana propria con il periostio del solco timpanico si vede realmente che questo periostio passa nella membrana propria. A questo fatto avevano già accennato molti osservatori e fra questi anche degli antichi, ma il primo a fare ricerche embriologiche su tale argomento è stato *Draispul*.

Nei Mammiferi il rapporto intimo della membrana propria col periostio dell'osso timpanico è sempre più o meno manifesto, è manifestissimo nel *Sorex*, perciò ho riprodotto in una Figura tale disposizione.

CARNIVORI

Cane.

Presenta bene manifeste le cellule fisse del connettivo che ho descritte sulla faccia esterna della membrana propria; anche la formazione cartilaginea è bene visibile.

CHIROTTERI

Rhinolophus ferrum equinum.

Fleischmann (2) afferma che il forame di *Rivinio* trovasi costantemente nel *Rhinolophus ferrum equinum*. Sezionai in serie membrane timpaniche di questo chirottero e con l'esame il più accurato non vidi traccia di forame Riviniano. Nel *Rhinolophus* la membrana propria si vede sorgere dal solco timpanico in modo analogo a quello osservato nel *Sorex*.

PRIMATI

Uomo.

La membrana timpanica umana fu studiata accuratamente da molti abili ricercatori (*Gerlach*, *Tröltsch*, *Kessel*, *Gruber*, *Brunner*, *Moldenhauer*,

(1) Draispul E. *Ueber die Membrana propria des Trommelfelles.* (Mittheilungen aus dem embryologischen Institute der K. K. Universität. Wien, 1890).

(2) Loc. cit.

Politzer), tuttavia rimane ancora campo a nuove indagini. Ho studiato lo strato medio, l'anello fibro-cartilagineo, le terminazioni nervose ed accuratamente ho voluto osservare se esiste nell'uomo il forame di *Rivinio.*

Dello strato medio ho preso in considerazione le fibre raggiate, le circolari e le cellule fisse del connettivo.

Riguardo alle fibre raggiate (Fig. 19) debbo dire che gli anatomici le descrivono esattamente ma non le riproducono, mi pare, in figure molto esatte. La disposizione delle fibre raggiate è analoga in tutti i Mammiferi che ho studiati quindi per tutti vale la descrizione che ho fatto di queste fibre nella Cavia.

Anche le fibre circolari (Fig. 19) sono disposte nell'uomo come nella Cavia e negli altri Mammiferi esaminati; si anastomizzano tra loro producendo una rete a larghe maglie, sono più grosse alla periferia, diminuiscono lentamente di spessore e di numero a misura si sale verso il manico del martello, in vicinanza del quale cessano. Anche la disposizione di queste fibre ed il loro rapporto con le raggiate non trovo riportati in esatte figure, perciò li ho fatti disegnare alla Fig. 19.

Sulla faccia esterna della membrana propria esistono cellule fisse analoghe a quelle che descrissi in altri Mammiferi, è da aggiungere che nell'uomo hanno perduto un po' quella loro disposizione trasversa rispetto alle fibre raggiate. Nell'uomo non potei metterle bene in evidenza come negli altri Mammiferi, ma del resto osservai molto chiaramente il corpo di queste cellule ed in molte vidi pure chiaramente i prolungamenti caratteristici anastomizzantisi tra loro. Che nell'uomo non si possano ottenere queste cellule fisse nette come in altri Mammiferi deve parer naturale, se pensiamo che non è possibile avere membrane timpaniche umane prima della 24ª ora dopo la morte.

L'anello fibro-cartilagineo è nell'uomo molto spesso, non può essere esaminato *in toto*. Abbiamo veduto che questo anello nella sua costituzione più semplice risulta di fibre raggiate e di fibre circolari; nell'uomo la struttura dell'anello fibro-cartilagineo si complica assai. I fasci a direzione raggiata sono la massima parte; delle fibre circolari se ne vedono solo poche sparse tra le raggiate e poche a piccoli gruppi nella parte postero-interna dell'anello fibro-cartilagineo. Oltre questi due ordini di fibre esistono nell'anello fibro-cartilagineo, in piccola quantità, *fibre* dette da *Moldenhauer tangenziali*, sono poste un po' obliquamente sulle fibre raggiate.

Riguardo alla presenza delle cellule cartilaginee nell'anello fibro-cartilagineo umano è controversia; le ammettono *Kessel*, *Gruber*, *Brunner*, *Moldenhauer*, le negano *Schwalbe*, *Politzer*.

Cellule cartilaginee esistono nell'anello fibro-cartilagineo umano e trovansi disseminate in prossimità del solco timpanico. *Moldenhauer* le riprodusse in una Figura certo con poca eleganza, ma secondo verità per ciò che riguarda il loro numero e la loro posizione. Si può a dirittura affermare che qualche cellula cartilaginea non manca mai; di 5 anelli fibro-cartilaginei esaminati le ho trovate in tutti (1), è da dire per altro che la quantità varia nei diversi individui; si ha quindi nell'uomo, rispetto alla presenza di cellule cartilaginee nell'anello fibro-cartilagineo, una disposizione omologa a quella che ho trovata in altri Mammiferi

Nella membrana timpanica umana ho studiato come si comportano i nervi.

Kessel (2) descrisse nello strato cutaneo della membrana timpanica un plesso fondamentale alla periferia, dal quale si partono fibre nervose senza mielina per costituire un plesso vasale e fibre egualmente senza mielina per dare origine ad un plesso sotto-epiteliale che invia fibrille tra le cellule epiteliali. I nervi dello strato mucoso vengono secondo *Kessel* dal plesso timpanico e formano un plesso vasale che accompagna però più i linfatici che i vasi sanguigni ed un plesso sotto-epiteliale che dà origine a fibrille le quali si recano verso l'epitelio. *Kessel* afferma che fibre del plesso fondamentale si accostano alle fibre della membrana propria.

Le ricerche di *Kessel*, non furono tenute in molto conto, generalmente i Trattatisti riguardo alla distribuzione dei nervi nella membrana timpanica spendono poche parole e fa così anche *Schenk* (3) il quale descrive con un certo amore la membrana timpanica.

Un po' per verificare se questa trascuraggine degli Autori era giustificata, un po' perchè le ricerche di *Kessel* non furono abbastanza controllate, mi decisi a fare sul modo col quale si distribuiscono i nervi nella membrana timpanica umana accurate indagini il resultato delle quali ora espongo.

---

(1) Ottenni questo risultato in sezioni di anelli fibro-cartilaginei tolti con grande cautela dal solco timpanico; evitai di studiare l'anello fibro-cartilagineo insieme all' osso timpanico per non sottoporre l'anello alla azione dei liquidi decalcificatori.

(2) Kessel J. *Das äussere u. mittlere Ohr.* (Handbuch der Lehre von den Geweben herausgegeben von S. Stricker). Leipzig, 1872.

(3) Schenk S. L. *Elementi di Istologia normale dell'uomo.* (Traduzione di A. Monti).

Per studiare le terminazioni nervose nella membrana del timpano usai tutti i metodi che nei trattati moderni di tecnica vengono esposti escluso, si comprende, quello all'azzurro di metile. Ebbi i migliori risultati dal metodo alla miscela di cloruro d'oro ed acido formico, adottato con quelle indicazioni che consiglia *Stöhr* (1).

Con il metodo alla miscela di cloruro d'oro ed acido formico potei mettere in evidenza i seguenti fatti. Sulla faccia esterna della membrana propria è un *plesso sotto-epiteliale* costituito da fibre amieliniche, alcune di queste decorrono parallelamente ai vasi. Dal plesso sotto-epiteliale si staccano fibrille che si recano in mezzo all'epitelio e fra le cellule di questo terminano con piccoli rigonfiamenti costituendo *terminazioni infra-epiteliali.*

Il risultato delle mie indagini conferma le ricerche di *Kessel.*

Che la membrana propria non possieda terminazioni nervose fu dimostrato da *Tröltsch.*

Anche per ciò che riguarda le terminazioni dello strato interno della membrana timpanica, le mie ricerche si accordano con quelle di *Kessel.* Si ha nello strato interno un *plesso sotto-epiteliale* che dà origine a *fibrille infra-epiteliali.*

Non potei osservare i plessi vasali nè sullo strato cutaneo, nè sul mucoso.

Forame di Rivinio.

Innanzi il 1691 si trovano solo vaghi accenni riguardo alla permeabilità della membrana timpanica, accenni riportati da *Haller* (2). Fu *Q. Rivinio* che affermò per il primo di avere trovato, nel 1689, sulla membrana timpanica un forame. *Rivinio* dette comunicazione di questa sua scoperta soltanto nel 1691, in una lettera indirizzata al *Nuck.*

Gli osservatori avevano notato i seguenti fatti. Taluni individui introdotto in bocca fumo di tabacco possono farlo uscire, chiusa la bocca e le narici, attraverso al meato auditivo esterno; attraverso a questo meato esce il sangue nei traumi della testa. Già *Schelhammer* aveva proposto a spie-

(1) Stöhr Ph. *Lehrbuch der Histologie.* Jena, 1892.

(2) Haller A. *Elementa physiologiae corporis humani.* Lausannae, MDCCLXIII.

gare questo problema. "Quo pacto aer, ac ipse etiam tabaci herbae fumus ore haustus, ex aure per meatum auditorium egreditur, cum tympani meninge is exacte sit clausus, auris vero interna, praeter hunc unum auditorium canalem, exitum habeat nullum„? Gli anatomici per spiegare questi fatti supposero che la membrana del timpano fosse pervia e con grande amore ricercarono in questa membrana un'apertura.

Nel 1691 *Rivinio* (1) annunziò la tanto desiderata scoperta in una lettera (2) al *Nuck* con queste parole: "Atque sic tandem anno 1689 mense Septembri eum inveni hiatum, diu quaesitum in ipsa tympani membrana„.

Il *Teichmeyer* (3) afferma: "Rivinus semper nobis demonstravit hocce suum inventum in brutis„.

Fu il *Munnick* (4) che per il primo dimostrò il forame di *Rivinio* nell'uomo. "..... Tunc enim tympani membrana prorsus illaesa conspicitur, porcinam setam, immediate sub chorda, haud difficulter admittens. Qua methodo hanc tympani membranae duplicaturam die 13 Novembris 1696 in capite humano demonstravi Artis Anatomicae studiosis„.

Facendo un accurato esame critico della lettera scritta da *Rivinio* al *Nuck* siamo subito indotti a mettere in grave dubbio il forame descritto da *Rivinio*.

Rivinio dimostrava il foro infiggendo nella membrana del timpano uno specillo *(stylus)* e siccome questo forame egli ammette che sia in vicinanza della testa del martello, è lecito sospettare che il forame venisse fatto artificialmente se pensiamo quanto sottile sia la membrana timpanica nella sua *porzione flaccida*.

Heister (5) ricercatore accurato e critico abilissimo potè far passare attraverso alla membrana timpanica, là ove *Rivinio* afferma esistere il foro, una setola, ma a proposito di questa ricerca scrive. ".... Verum semper dubius haesi et adhuc haereo, utrum seta per naturalem meatum transierit;

---

(1) Rivinius A. Q.

(2) Rivinius M. J. A. *De Auditus vitiis.* (Haller. Disputationum anatomicarum selectarum Volumen IV. Gottingae, MDCCXXXXIX).

(3) Theichmeyer H. F. *Dissertatio medica solennis sistens Vindicias quorundam inventorum meorum anatomicorum etc.* (Haller. Disputationum Anatom. select. Vol. IV. Gottingae, MDCCXXXXIX).

(4) Munnick T. *De Re Anatomica.* Trajecti ad Rhenum, 1697.

(5) Laurentii Heisteri. *Compendium anatomicum.* Venetiis, MDCCLV.

an potius per tam tenuem membranam novam aperturam fecerit: experimentum enim sine notabili quadam pressione mihi non successit; quali etiam aliis in locis membranam tympani perforare poteram „.

Rivinio scrive che il forame è chiuso da una specie di sfintere; che tolto lo specillo il forame si richiude. Se in qualunque punto della membrana di *Schrapnell* si produce con un sottile specillo un foro, tolto lo specillo i tessuti della membrana timpanica tornano ad occupare la primitiva posizione e del foro non rimane apparentemente traccia.

Nel commento alla lettera di *A. Q. Rivinio, A. Rivinio* censura *Valsalva* che aveva affermato di avere visto il foro della membrana timpanica beante, e censura anche *A. Rudigerus* che affermava di avere osservati molti forellini nella membrana timpanica; quindi i primi ricercatori del forame della membrana timpanica ebbero risultati affatto diversi.

Contro all'opinione di *Rivinio* si annoverano *Ruisch, Raw, Walther, Casserius, Cassebon, Haller, Meckel, Cloquet, Sappey, Testut.* Ebbe però il forame di *Rivinio* i suoi fautori e questi furono: *Munnik* e *Teichmeyer* già ricordati, *Hoffmann, Wittmann* e *Vest, Berres, Fleischmann, Bochdalek sen. Bochdalck jun.*

L'autorità di *Haller* aveva fatto dimenticare il forame di *Rivinio,* il quale fu rimesso in onore da *Wittmann* e *Vest* (1), da *Berres* (2), da *Fleischman* (3), da *Bochdalek sen.* (4), da *Bochdalek. jun.* (5). I risultati ottenuti da questi ricercatori spinsero alcuni anatomici a non decidersi recisamente contro la opinione di *Rivinio (Henle, Hirtl, Cruveilhier, Schwalbe),* e persuasero altri in favore di questo forame *(Gegenbaur, Debierre).*

Perchè intorno alla esistenza del forame di *Rivinio* esiste ancora controversia ho voluto portare la mia ricerca con molta accuratezza su questo argomento facendo la indagine in tutta la serie e la mia indagine ho rivolta in modo particolare al *Rhinolophus ferrum equinum* perchè in esso *Fleischmann* ammise che il forame di *Rivinio* è costante ed accurate ricerche ho fatte

---

(1) Wittmann u. Vest. *Ueber die Wittmann'sche Trommelfellklappe.* (Medicinische Jahrbücher des österreich. Staates. *V. Bd.* 1819.

(2) Berres. *Grundriss der Physiologie.*

(3) Loc. cit.

(4) Bochdalek sen. *Otologische Beiträge.* (Prager Vierteljahrsschrift Bd. I, 1866).

(5) Bochdalek jun. *Beitr. zur Anatomie des Gehörorgans.* (Oesterr. Zeitschr. f. pract. Heilk. 1866. *Nr.* 32, 33, 35).

anche nell'uomo nel quale afferma *Bochdalek jun.* di aver trovato costantemente il forame di *Rivinio.*

Per risolvere con certezza assoluta se esista o no questo forame, la tecnica istologica fornisce un metodo esatto, basta tagliare in serie le membrane del timpano, in tal modo alla osservazione non può sfuggire il minimo forame. Mi sono valso appunto delle serie per verificare se esista o no il forame di *Rivinio.* Le mie indagini mi autorizzano a concludere che aperture normali nella membrana del timpano esistono mai.

Nemmeno *Dreyfuss* (1) nell'importante, recentissimo lavoro sullo sviluppo dell'orecchio medio e della membrana del timpano ha trovato il forame di *Rivinio.*

CONCLUSIONI GENERALI.

Con le mie ricerche avendo confermato particolarità osservate da altri e avendone messe in evidenza delle nuove, posso venire alle seguenti conclusioni.

1. La membrana del timpano apparisce nella classe degli Anfibii, nell'ordine degli Anuri.

2. Nella classe dei Rettili manca la membrana timpanica negli Ofidi, la posseggono alcuni Sauri, la posseggono i Cheloni. Nell'ordine dei Sauri manca la membrana timpanica all'*Anguis fragilis* nel quale viene ammessa dagli anatomici.

3. Hanno membrana timpanica gli Uccelli ed i Mammiferi.

4. La membrana timpanica è nella sua faccia laterale concava negli Anuri e nei Mammiferi, convessa nei Rettili e negli Uccelli.

5. La periferia della membrana timpanica è in rapporto negli Anuri con la cartilagine timpanica; nei Sauri con il quadrato, con la mandibola, con parti molli, con l'apparecchio joideo; nei Cheloni con il quadrato; negli Uccelli con il quadrato, con l'occipitale laterale e con il basi-occipitale; nei Mammiferi con il timpanico.

6. La membrana del timpano in tutta la serie è costituita da tre strati

---

(1) DREYFUSS R. *Beiträge zur Entwicklungsgeschichte des Mittelohres und des Trommelfells des Menschen und der Säugethiere.* (Abdruck aus den Morfologischen Arbeiten herausgegeben von. G. SCHWALBE. Zweiter Band, drittes Heft).

che sono lo *strato esterno (cutaneo)* lo *strato medio (fibroso)*, lo *strato interno (mucoso)*.

7. Lo strato esterno è in tutta la serie una dipendenza della pelle la quale si modifica più o meno per divenire atta ad una nuova funzione, nè a questa legge si sottrae la membrana timpanica degli Anuri come risulterebbe dalla descrizione che ne fanno gli anatomici. Nella Pecora per breve tratto trovai nello strato cutaneo della membrana timpanica, papille dermiche bene sviluppate.

8. Nello strato cutaneo umano esiste un *plesso sotto-epiteliale* dal quale sorgono *terminazioni infra-epiteliali*.

9. Lo strato medio è di natura connettiva in tutta la serie, tranne che negli Anuri nei quali alla periferia della membrana del timpano i fasci del connettivo si mescolano con le fibre muscolari lisce del tensore della membrana timpanica.

10. Nello strato medio degli Anuri la direzione delle fibre è raggiata; nei Sauri è raggiata ed esistono poche fibre circolari riunite in fascetti; nei Cheloni le fibre non hanno andamento regolare, ma si incrociano in vario senso, del resto quelle in direzione raggiata prevalgono; negli Uccelli si hanno fibre connettive raggiate a contatto dello strato cutaneo, sotto queste esistono fibre che si incrociano in vario senso, poste trasversalmente al di dietro delle raggiate e che corrispondono alle circolari dei Mammiferi, di più come nei Rettili si hanno fibre connettive raccolte in fascetti che partono dall'apice dei rami della columella, uno però di questi fasci sorge dalla parte anteriore della periferia. Nei Mammiferi le fibre raggiate sono all'esterno, le circolari all'interno. L'aver trovato nei Rettili e negli Uccelli fascetti che a costituire la membrana propria sorgono dai rami della columella, farebbe ragionevolmente supporre che anche nei Mammiferi il periostio dell'ossetto che è in stretto rapporto con la membrana propria, contribuisca a formarla. Negli individui adulti della classe dei Mammiferi però questa dimostrazione non è possibile a farsi, solo le ricerche embriologiche porteranno la luce su tale argomento. *Draispul* accenna al passaggio del pericondrio del martello nella membrana propria, ma la critica fatta da *Dreyfuss* a questa ricerca dimostra che necessitano in proposito, nuove, più accurate indagini.

11. Le fibre circolari dei Mammiferi resistono lungamente all'azione della potassa caustica al 10 per cento e lunghissimamente all'azione dell'acido acetico, le fibre raggiate resistono meno all'azione di questi reagenti; hanno quindi le fibre circolari e le raggiate caratteri che le avvicinano alle fibre elastiche.

12. In tutta la serie le fibre raggiate sono più fitte e più grosse in corrispondenza della columella e del manico del martello, sono più sottili alla periferia; alla periferia le fibre raggiate vengono rafforzate da fibre muscolari lisce negli Anuri, da fascetti di connettivo nei Sauri, dalle fibre circolari negli Uccelli e nei Mammiferi.

13. In tutti i Mammiferi che ho esaminati si scorge più o meno chiaramente l'intimo rapporto della membrana propria col periostio dell'osso timpanico, nel *Sorex vulgaris* e nel *Rhinolophus ferrum equinum* è manifestissimo.

14. In tutta la serie esistono tra le fibre raggiate spazii occupati da cellule fisse del connettivo le quali devono chiamarsi *corpuscoli di Tröltsch* perchè analoghi a quelli descritti da *Tröltsch* nell'uomo. Nei Mammiferi oltre queste cellule ne ho messe in evidenza altre poste trasversalmente sulla faccia esterna dello strato medio, munite di numerosi prolungamenti che si anastomizzano tra loro.

15. I corpuscoli di *Tröltsch* in vicinanza del manico del martello (Pecora, Cavia, Coniglio, Cane) sono accolti in capsule cartilaginee e costituiscono una *formazione* che dovrebbe chiamarsi *cartilaginea*, non comprendendo in questa denominazione quello strato di cellule cartilaginee che trovansi sul manico del martello quale residuo della cartilagine embrionaria.

16. Nello strato medio non esiste tessuto elastico.

17. Alla periferia della membrana timpanica è un ispessimento anulare che deve chiamarsi *anello fibro-muscolare* negli Anuri, *fibroso* nei Sauri e negli Uccelli, *fibro-cartilagineo* nei Mammiferi. Questo anello in tutta la serie dei Mammiferi contiene cellule cartilaginee.

18. Osservai le *formazioni dendritiche* nei Cheloni, nel Pollo, nell'Uomo.

19. La columella negli Anuri, nei Sauri, negli Uccelli, il manico del martello nei Mammiferi non fanno rilievo nella superficie laterale della membrana timpanica, sporgono invece nella cavità del timpano.

20. Lo strato interno della membrana timpanica è una dipendenza della

mucosa che riveste la cassa timpanica, l'epitelio di questo strato è pavimentoso semplice in tutta la serie.

21. Nello strato interno della membrana timpanica umana è un *plesso* nervoso *sotto-epiteliale* che dà origine a *terminazioni infra-epiteliali.*

22. Non esiste il forame di *Rivinio;* nella membrana timpanica non ho mai trovato aperture normali.

SPIEGAZIONI DELLE FIGURE

(TAVOLA I)

FIG. 1. — Sezione che passa attraverso alla testa di *Rana esculenta,* poco sotto l' estremo inferiore del pezzo distale della columella (Semischematica). — *m t* membrana timpanica con i suoi tre strati; *p* pelle; *t* porzione laterale della cavità timpanica; *t'* porzione mediale della cavità timpanica; *c t* cartilagine timpanica; *p t i* processo inferiore del timpanico; *j o* joide; *p r* prootico.

FIG. 2. — Sezione trasversa della membrana timpanica di *Rana esculenta,* eseguita in prossimità della sua periferia, in basso. (*Hartnack* ob. 4, oc. 3). (Le medesime indicazioni della Fig. precedente).

FIG. 3. — Sezione trasversa della membrana timpanica di *Rana esculenta* eseguita immediatamente prima dello inspessimento che le fibre raggiate presentano in vicinanza della columella. (Ingrandimento ed indicazioni come nella Fig. precedente).

FIG. 4. — Sezione trasversa della membrana timpanica e della columella in prossimità dello estremo inferiore del pezzo distale della columella. (*Hartnack* ob. 4, oc. 3) — *c* columella.

FIG. 5. — Sezione trasversa della membrana timpanica e della columella, 6 tagli al di sopra della precedente.

FIG. 6. — Contorno della membrana timpanica del *Platydactilus muralis.* Fascetti di rinforzo a direzione circolare che partono dai rami della columella *c.*

FIG. 7. — Sezione attraverso la testa di *Anguis fragilis.* (*Hartnack* ob. 4, oc. 3). — *p* pelle; *c* columella; *q* quadrato; *t* cavità timpanica; *m* mucosa della cavità timpanica.

FIG. 8. — Sezione attraverso alla membrana timpanica di *Cistudo europaea* eseguita in prossimità della periferia, in alto. (Ingrandimento della Fig. precedente. — *s c* strato cutaneo della membrana timpanica; *s m* strato medio; *s i* strato interno; *q* quadrato. (Individuo giovane).

FIG. 9. — Sezione attraverso alla membrana timpanica della *Cistudo europaea*, eseguita al principio del *disco cartilagineo* (Ingrandimento ed indicazioni della Fig. precedente). (Individuo adulto).

FIG. 10. — Fibre raggiate dello strato medio della membrana timpanica del *Pollo,* viste in superficie sulla faccia esterna. (*Hartnack* ob. 4, oc. 3). — *c* columella; *f r* fibre raggiate; *s t* striscia tendinea; *f a s* fascio di rinforzo anteriore.

FIG. 11. — Sezione raggiata della membrana timpanica di *Pecora.* (Ingrandimento della Fig. precedente). — *m t* membrana timpanica; *s c* strato cutaneo di questa membrana munito di papille.

Fig. 12. — Strato medio della membrana timpanica di *Cavia* visto in superficie, mostra il rapporto dei fasci raggiati con i circolari. (Ing. della Fig. precedente).

Fig. 13. — Porzione inferiore del preparato precedente ingrandita; alla periferia si vede l' anello fibro-cartilagineo. (*Hartnack* ob. 7, oc. 3).

Fig. 14. — Formazione cartilaginea posta lateralmente al manico del martello, in vicinanza dello estremo inferiore del manico. (*Cavia*).

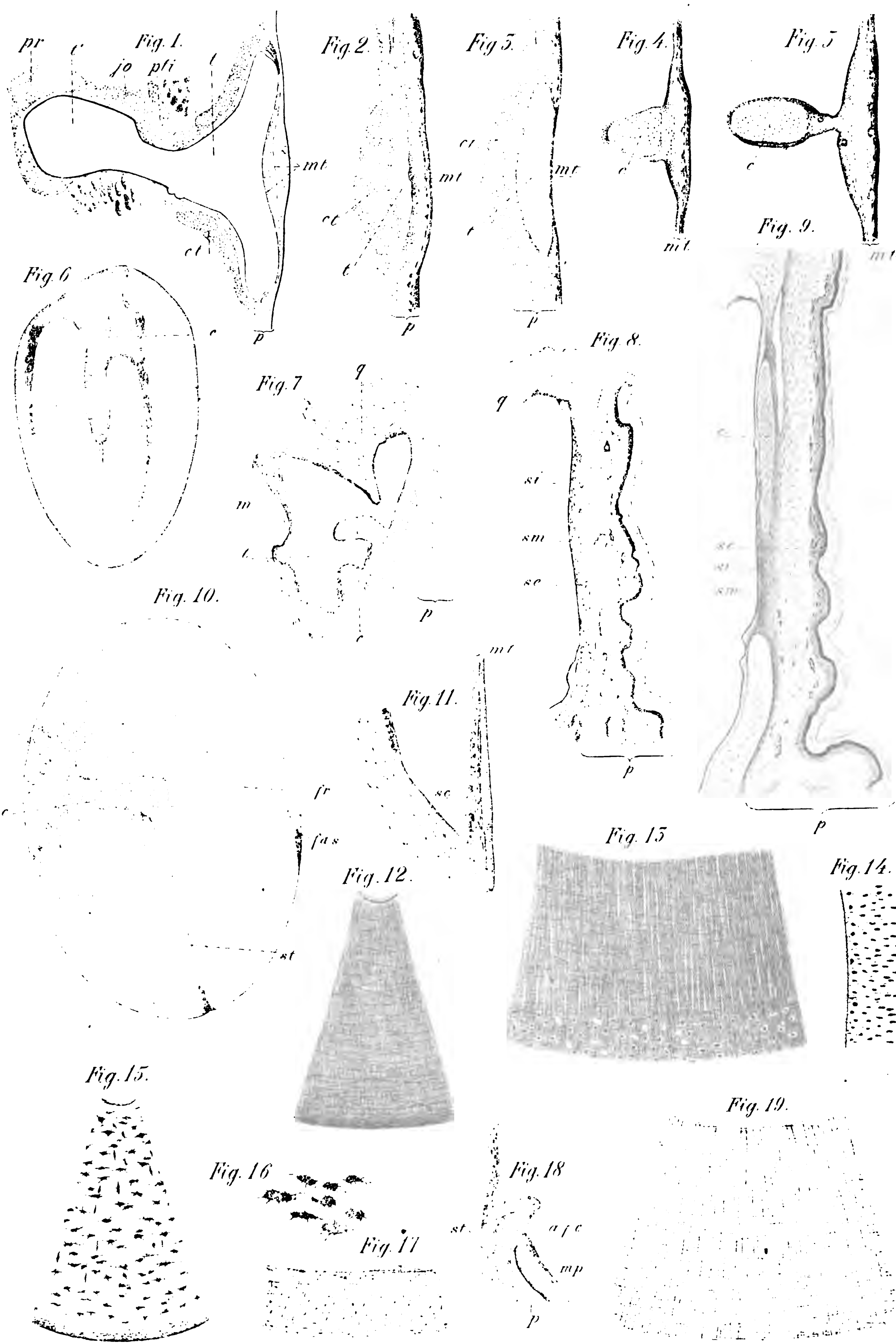
Fig. 15. — Segmento della parte inferiore della membrana timpanica di *Cavia,* nel quale sono disegnate le cellule fisse del connettivo poste sulla faccia esterna dello strato medio. (*Hartnack* ob. 4, oc. 3).

Fig. 16. — Alcune delle cellule fisse della Fig. precedente ingrandite. (*Hartnack* ob. 7, oc. 3).

Fig. 17. — Anello fibro-cartilagineo del *Moscardino (Myoxus avellanarius*). (Ingrandimento. della Fig. precedente).

Fig. 18. — Sezione raggiata della membrana timpanica del *Musoragno* (*Sorex vulgaris*). (*Hartnack* ob. 4, oc. 3). — *s t* solco timpanico; *a f c* anello fibro-cartilagineo; *m p* membrana propria; *p* pelle del meato auditivo esterno.

Fig. 19. — Rappòrto delle fibre raggiate con le circolari nella membrana timpanica umana. (Preparato in superficie). (*Hartnack* ob. 7, oc. 3).


Fig. 1.
pr
c
jo
pti
t
mt
ct
p
Fig. 2.
mt
ct
t
p
Fig. 3.
ct
mt
t
p
Fig. 4.
c
mt
Fig. 5.
c
mt
Fig. 6.
c
Fig. 7.
q
m
t
p
c
Fig. 8.
q
st
sm
se
p
Fig. 9.
p
Fig. 10.
c
st
Fig. 11.
mt
fr
fas
se
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
st
afc
mp
p
Fig. 19.

Prof. PASQUALE LANDI

Illustrazione di una Tavola cromo-litografica, rappresentante l'aorta, le arterie e vene iliache comune e più specialmente le arterie iliaca e femorale sinistre di Raffaello Tubertini; al quale per aneurisma traumatico consecutivo della stessa arteria femorale, legai la corrispondente arteria iliaca esterna, e successivamente la femorale.

Per maggiore chiarezza e più facile intelligenza, premetto alla spiegazione della Tavola alcuni dei più importanti ricordi, relativi al predetto malato, riassunti dalla Storia clinica pubblicata nell'*Ippocratico* (1).

Ferita di coltello da 3 anni (1863), nella faccia anteriore, 3.° superiore della coscia sinistra. Emorragia grave, arrestata con la compressione diretta. Tarda cicatrizzazione della ferita. Comparsa dopo un anno di un aneurisma in corrispondenza della cicatrice della predetta ferita. Era un' aneurisma traumatico, consecutivo della femorale superficiale sinistra. Piccolo in principio e circoscritto, crebbe assai in progresso di tempo e divenne diffuso. Il malato entrò nella Clinica chirurgica di Bologna il 14 Agosto 1866, due anni dopo la comparsa dell'aneurisma; il quale era già tanto grosso, che in alto raggiungeva quasi l'arcata femorale. Il suo diametro longitudinale misurava 15 centimetri, il trasversale 13.

Non v' era spazio sufficiente per la compressione duplice alterna, ma quantunque non fosse il caso da sperare la guarigione con tale processo di compressione, applicai l'apparecchio di Broca e messi in azione soltanto la pallotta superiore, con l' unico intendimento di frenare momentaneamente lo sviluppo ulteriore del tumore, e rendere più attiva la circolazione collaterale.

(1) I malati della Clinica chirurgica di Bologna nell'anno 1865-66; *L' Ippocratico Serie III, Vol. XI,* Fano 1867.

Ben presto il sangue circolante nella porzione periferica del tumore si coagulò, ma al tempo stesso quello fecesi più sporgente, la pelle soprapposta divenne risipolatosa e la compressione intollerabile: perciò questa fu sospesa. Tre giorni dopo nel punto più culminante del tumore medesimo, si presentò un'escara cancrenosa della estensione di 3 centimetri.

Agosto 23 — Legatura dell'iliaca esterna 3 centim. circa al di sopra dell'arcata femorale, col processo attribuito a Roux.

Agosto 30 — Inciso il tumore che stava per rompersi, ed evacuata molta marcia mescolata a coaguli sanguigni alterati.

Settembre 3 — Erano trascorsi 11 giorni dalla legatura della iliaca esterna. Nel medicare il tumore, già in piena suppurazione, si distaccò un coagulo sanguigno ed immediatamente si manifestò imponente emorragia, che non si potè determinare se provenisse dal capo inferiore dell'arteria legata, e che fu arrestata riempiendo la cavità della sacca suppurante con fila imbevute in percloruro di ferro allungato, con fasciatura compressiva di tutto l'arto e con vescica ripiena di ghiaccio.

Settembre 15 — Caduta del laccio della iliaca esterna al 25.° giorno dalla sua applicazione.

La mattina del 18 Settembre e la notte successiva, nuova emorragia, frenata al solito con la compressione diretta e col ghiaccio.

Settembre 19 — Esame accurato della piaga per scuoprire d'onde la emorragia provenisse. Scorgo lungo il margine interno del sartorio un vaso pulsante, che riconosco per la femorale superficiale, la quale di contro alla cicatrice della vecchia ferita, presentava un piccolo gozzo aneurismatico, che minacciava di rompersi.

La pulsazione della femorale dopo legata la iliaca esterna, e soltanto dopo la caduta del laccio, era un fatto non troppo comune, e trovava una razionale spiegazione solamente nelle anastomosi della epigastrica con la mammaria interna.

Settembre 20 — Onde prevenire la rottura del gozzo aneurismatico e conseguentemente nuove emorragie, lego la femorale comune, 2 centim. circa al di sotto dell'arcata femorale.

Caduta del laccio al 9.° giorno.

Dopo questa legatura l'arto andò progressivamente cancrenandosi.

Ottobre 7 — La femorale torna a pulsare, e l' 11 si rompe il piccolo gozzo aneurismatico. Freno l'emorragia con legatura mediata alla maniera dello Scarpa, per timore che la parete arteriosa sia malata.

Ottobre 22 — L'arto essendo in gran parte sfacelato, amputo la coscia nel suo terzo superiore, col metodo a lembi.

Il 4 Decembre il malato era guarito, e provvisto di gambale muoveva i primi passi per le Sale cliniche. Sventurato! In quel tempo nella Clinica Medica, in diretta comunicazione con quella Chirurgica, eravi qualche caso di vaiuolo arabo, dal quale anche il povero Tubertini fu preso dopo 10 giorni, e ne soccombè il 24 dello stesso mese.

Le alterazioni riscontrate nella regione inguino - crurale, ove legaï le predette arterie, furono le seguenti:

Messa allo scoperto nella regione inguinale l'aponeurosi addominale, vedevasi al di fuori dell'arteria epigastrica, un centimetro e mezzo al di sopra dell'arcata femorale, e a tre centimetri dalla spina iliaca anteriore superiore, la detta aponeurosi divaricata in forma ellittica, avente il maggiore diametro di sette centimetri. Nel centro di questa specie di smagliatura aponeurotica, risultato della incisione ivi praticata per scuoprire l'arteria iliaca esterna, si trovava un piccolissimo pertugio che conduceva a quella arteria: era quello il residuo dello stesso tramite percorso in passato dal laccio, e già prossimo alla sua completa obliterazione. Il peritoneo aderiva validamente alla iliaca esterna, nel punto in cui era stata legata.

La guaina dei vasi iliaci esterni era assai ingrossata e tenacemente adesa, soprattuto all'arteria; la quale dalla sua origine fino al punto in cui fu legata, vale a dire per la estensione di otto centimetri e mezzo, si presentava esternamente dura, più piccola della corrispondente e di colore ardesia. Nel punto in cui fu strozzata dal laccio era ridotta alle dimensioni di due millimetri, ed era tanto aderente alla vena da non potere isolare l'uno dall'altro vaso, senza comprometterne la integrità. L'indicato punto di notevole diminuzione del calibro dell'arteria, si trovava a due centimetri e mezzo circa al di sopra della arcata femorale, e poco più di un centimetro al di sopra della origine della circonflessa iliaca; mentre la epigastrica, che era pervia, sorgeva qualche millimetro al di sotto di quest'ultima arteria.

La permeabilità della epigastrica, dava ragione della ristabilita circo-

lazione nell'arteria femorale, dopo la legatura della iliaca esterna, in grazia delle anastomosi della stessa epigastrica con la mammaria interna.

Anche nel punto nel quale avevo applicato la legatura sulla femorale superficiale, vedevasi in questa un notevole ristringimento; e siccome esso trovavasi a sei millimetri al di sotto della femorale profonda, e questa nasceva a tre centimetri e mezzo al di sotto dell'arcata femorale, così fra l'uno e l'altro punto in cui l'arteria fu legata, eravi uno spazio in lunghezza di circa sette centimetri. Questo tratto di arteria, quantunque in apparenza sano, presentava maggiore consistenza, e calibro un poco più piccolo del corrispondente. Il rimanente dell'arteria femorale, che è la stessa porzione di arteria corrispondente al punto in cui ebbe sede l'aneurisma, per la lunghezza di sei centimetri aveva perduto forma e tessitura vascolare, e convertito in tessuto cellulo-fibroso, con la sua estremità si confondeva con il tessuto di cicatrice del moncone.

Isolata e distaccata l'iliaca esterna sinistra insieme alla porzione della femorale che le fa seguito, alla iliaca primitiva da cui quella emana e alle corrispondenti vene satelliti, ed aperti longitudinalmente i ricordati tronchi arteriosi, si osservava quanto segue *(vedi Tavola).*

Nel punto di partenza della iliaca esterna, dalla primitiva, un coagulo sanguigno leggermente tinto in rosso, consistente e con apparenze decisamente fibrinose; il quale dopo avere perfettamente ostrutto l'orifizio di comunicazione con l'arteria iliaca primitiva, si estende obliquamente in alto dallo sprone delle due iliache, e per la estensione di due millimetri forma una specie di contro-parete a quella naturale costituente la semicirconferenza esterna della iliaca primitiva. L'apice del coagulo, che ha forma conica, schiacciata, aderisce alla tunica interna della predetta arteria; tanto chè il sangue ivi circolante dopo avere a poco a poco costituito il ricordato coagulo, trovava più diretta via nella iliaca interna. Oltre di che quel coagulo si continua in basso nella iliaca esterna, e completamente la ostruisce fino al punto in cui fu legata, ed offre di più alcune gradazioni nel colorito, nel volume, nella consistenza, e nei rapporti con le tuniche arteriose.

Quanto al colore il coagulo a mano a mano che discende, passa dal rosso alquante vivace a quello più smorto, e in alcuni punti apparisce di un bianco sporco.

Quanto al volume, va progressivamente scemando nella discesa; però la diminuzione è più apprezzabile specialmente verso la metà del vaso.

Quanto alla consistenza, può dirsi molta e in generale uniforme; se non che a due centimetri e mezzo in distanza dal punto in cui fu applicata la legatura, il coagulo comincia a rammollirsi e per piccola estensione è affatto scomparso o smaltito.

Finalmente quanto ai suoi rapporti, il coagulo aderisce tenacemente alle tuniche arteriose. In corrispondenza poi del punto sul quale agì la legatura, la tunica esterna aderisce su se stessa per la faccia interna, e costituisce l'apice di una specie d'infundibulo della lunghezza di circa due millimetri.

Immediatamente al di sotto di questa specie di infundibulo, ha principio altro coagulo sanguigno, di colore roseo, abbastanza consistente e con apparenze manifestamente fibrinose: esso estendesi fin là ove fu legata l'arteria femorale superficiale. Il volume di questo coagulo è in generale di sette millimetri, ed è un poco maggiore soltanto in corrispondenza della origine della fermorale profonda. I rapporti di questo coagulo con la superficie interna del vaso sono, al pari di quelli del precedente, costituiti da adesioni bastantemente solide. In questo coagulo si vedono bene delineati due apici; uno in corrispondenza della legatùra della iliaca, e l'altro in corrispondenza della legatura della femorale.

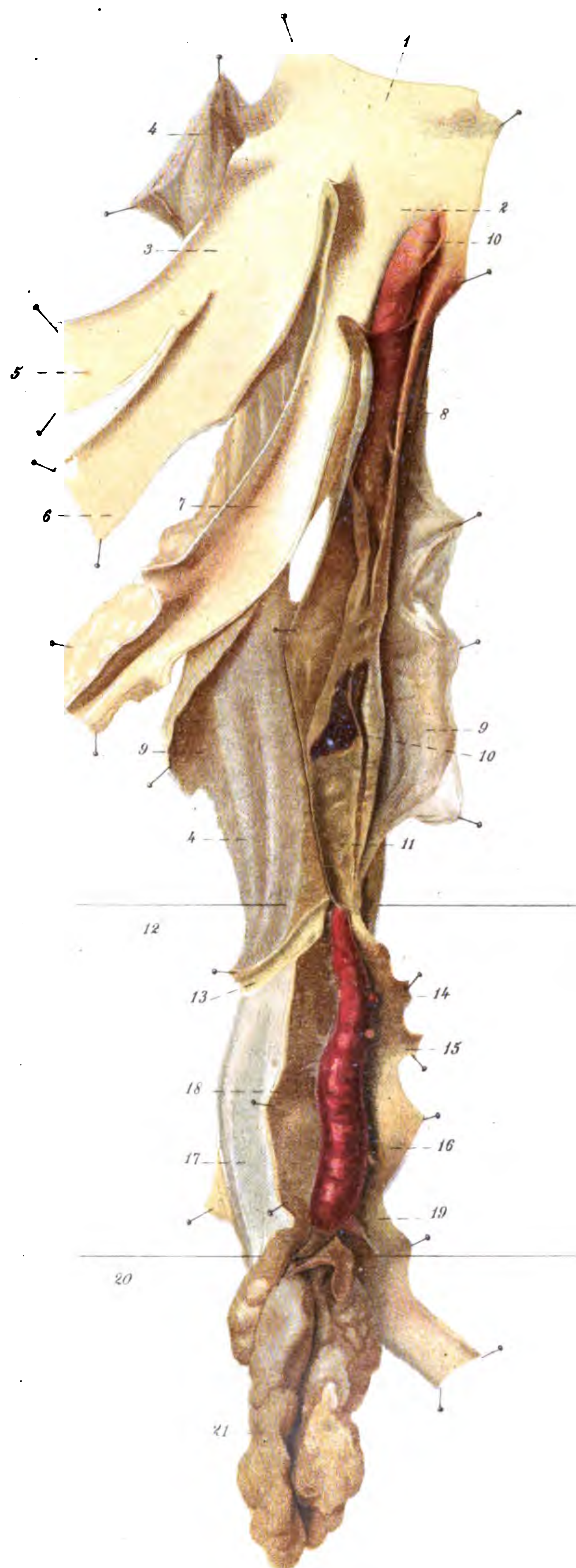
Alla origine dei vasi, circonflessa iliaca e sottocutanea addominale, si trova un coaguletto sanguigno, lungo un millimetro, che fa continuazione col coagulo della femorale. Anche all'origine della femorale profonda si vede un coagulo di forma papillare, lungo tre in quattro millimetri, ed in continuazione con il coagulo principale della femorale comune. Il rimanente della femorale fino all'apice del moncone della coscia è convertito, come fu avvertito in passato, in tessuto cellulo-fibroso, più che adiposo; lo che si deduce anche dalla sua notabile consistenza.

Le preindicate alterazioni, riprodotte oggi dal suo disegno originale in *Tavola cromo-litografica*, costituiscono, a mio credere, uno speciale ed assai pregevole esemplare di Anatomia patologica di arterie aneurismatiche, legate da 4 mesi.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

(Tavola II)

1. — Aorta.
2. — Arteria iliaca comune sinistra.
3. — Arteria iliaca comune destra.
4, 4′. — Vena iliaca comune sinistra.
5. — Arteria iliaca esterna destra.
6. — Arteria iliaca interna destra.
7. — Arteria iliaca interna sinistra.
8. — Arteria iliaca esterna sinistra, ripiena di un coagulo fibrinoso.
9, 9′. — Guaina dei vasi iliaci esterni notabilmente ingrossata ed aderente ai predetti vasi, specialmente all' arteria.
10. 10′. — Coagulo fibrinoso in vari gradi di metamorfosi.
11. — Punto in cui il coagulo erasi rammollito in modo, da essere ridotto ad una poltiglia grigiastra.
12. — Luogo in cui era caduta la legatura dell'iliaca esterna (23 Agosto 1866).
13. — Arteria epigastrica pervia.
14. — Arteria circonflessa iliaca.
15. — Arteria sottocutanea addominale.
16. — Arteria femorale.
17. — Vena femorale.
18. — Coagulo fibrinoso che riempie l' arteria femorale comune.
19. — Arteria femorale profonda nella quale si prolunga, per breve tratto, il coagulo dell' arteria femorale comune.
20. — Luògo in cui fu applicato il laccio sulla femorale (20 Settembre 1866).
21. — Tessuto cellulo-fibroso in cui non è possibile riconocere e seguire il decorso dell' arteria femorale superficiale.


1
4
2
10
3
5
8
7
6
9
9
10
4
11
12
13
14
15
18
16
17
19
20
21